Vorlesung Experimentalphysik I am 20.12.1999 und 21.12.1999 J. Ihringer

4 Schwingungen und Wellen

Schwingungen sind zeitlich periodische Zustandsänderungen. Eine beliebige physikalische Größe schwingt, wenn ihr Betrag in jedem Augenblick ihrer zweiten Ableitung nach der Zeit entgegengesetzt, aber proportional ist. Die Proportionalitätskonstante ist das Quadrat der Kreisfrequenz. Man denke an die Auslenkungen eines mechanischen Pendels: Die Auslenkung ist zu ihrer zweiten zeitlichen Ableitung, der Beschleunigung, immer entgegengesetzt, aber proportional. Im elektrischen Schwingkreis verhalten sich Ladung und ihre zweite Ableitung, die Änderung des Stroms, analog. Wellen sind wie Schwingungen periodische Funktionen, die aber nicht nur in der Zeit, sondern auch im Raum periodisch sind.

In Systemen mit Schwingungen und Wellen gibt es einen Gleichgewichtszustand und rücktreibende Kräfte, die bei Störungen das Gleichgewicht wieder herzustellen versuchen. Die Ursache für die Kräfte sind in starren Körpern Federn, in Gasen und Flüssigkeiten Drucke, bei Diffusion Dichtegefälle, in elektrischen Schwingkreisen elektrische Felder.

Ein schwingendes System kann beliebig viele schwingende Objekte enthalten: Das Federpendel enthält nur einen Massenpunkt, ein Kristall aus einem mol eines Stoffes $6 \cdot 10^{23}$ schwingende Bausteine. Bei gekoppelten Objekten spricht man von gekoppelten Schwingungen. Gekoppelte Teilchen schwingen im allgemeinen abwechselnd mehr oder weniger stark, die Energie wandert zwischen den Teilchen hin und her. Es gibt aber spezielle Schwingungen, bei denen alle Teilchen auf gleichbleibende Art schwingen: Das sind die Eigenschwingungen des Systems. Ihre Anzahl und Schwingungsform ist für das System spezifisch. Alle anderen Schwingungen sind Überlagerungen von Eigenschwingungen. Sie führen zu dem oben genannten schwer zu durchschauenden Muster abwechselnd bewegter Teilchen, das aus der Betrachtung kaum Rückschlüsse auf das System erlaubt.

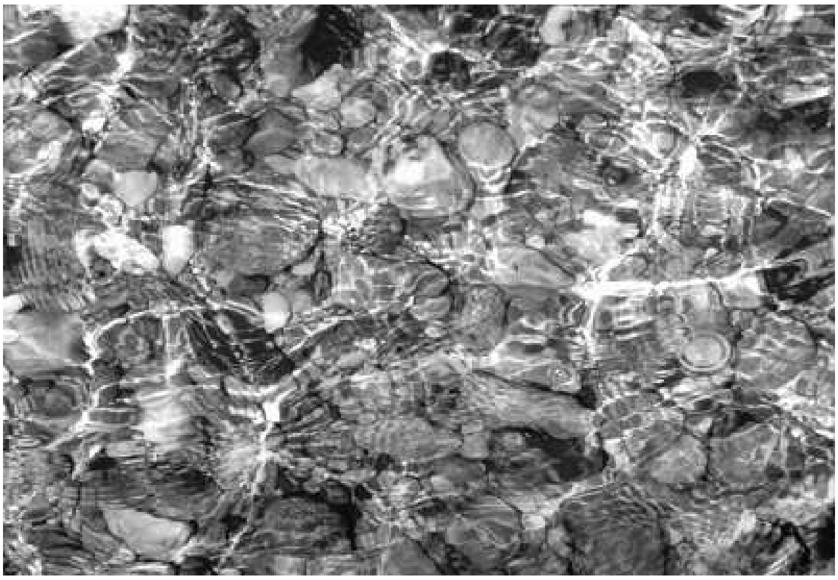


Abbildung 1 Die Lichtspiele auf den Steinen entstehen durch Lichtbrechung an den in Raum und Zeit veränderlichen Wellen an der Oberfläche des Wassers

4.1 Schwingungen

Die Verknüpfung einer Eigenschaft (z. B. Kraft, elektrische Spannung oder Konzentration) die eine Auslenkung zurückstellt („Antwort“), mit einer gleichartigen Eigenschaft, die eine Auslenkung aus einer Gleichgewichtslage („Störung“) bewirkt (z. B. Trägheitskraft eines in Schwung gebrachten Pendels), bezeichnet man als Rückkopplung. Charakteristisch für die Kopplung ist ihre Stärke, aber auch ihr Zeitverhalten: Besonders wichtig sind Rückkopplungen, die zu Schwingungen führen. Das geschieht immer dann, wenn der zeitliche Verlauf der Antwort proportional zum Negativen Wert der zweiten zeitlichen Ableitung der Störung ist. So werden z. B. biologische Systeme zu Schwingungen angeregt, die den 24 Stunden Takt vieler Lebensvorgänge steuern:

28.10.98 Frankfurter Allgemeine Zeitung

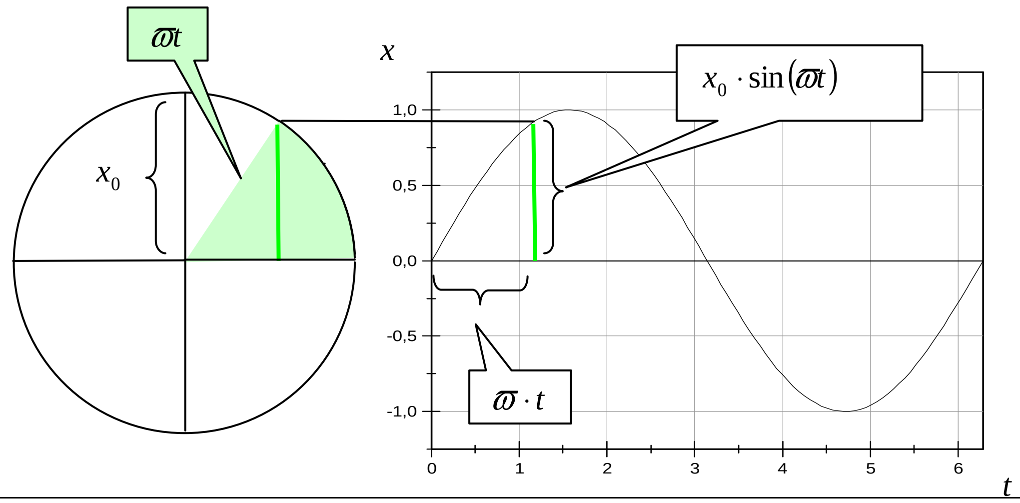
Gleiche Mechanik bei inneren Uhren

Die innere Uhr der Organismen, die zahlreiche Lebensvorgänge periodisch im 24-Stunden-Takt ablaufen läßt, hat sich während der Evolution offenbar mehrmals unabhängig voneinander entwickelt. Eine innere Uhr hat man bisher bei Pflanzen und Tieren sowie bei Pilzen und Hefen gefunden. Japanische Forscher haben nun auch bei den zur Photosynthese befähigten Cyanobakterien einen solchen Rhythmus entdeckt. Die Lebewesen schütten unter dem Diktat der inneren Uhr bestimmte Hormone, Verdauungsenzyme und viele andere physiologisch wirksame Stoffe aus. Die Cyanobakterien nutzen den zirkadianen Rhythmus für die Stickstoffixierung und die Aufnahme von Aminosäuren. Der Mechanismus ihrer inneren Uhr ist derselbe wie bei vielen anderen Organismen. Die Bauteile der bakteriellen Uhr jedoch sind völlig anders, wie Masahiro Ishiura von der Universität Nagoya in der Zeitschrift „Science“ (Bd. 281, S. 1519) berichtet. Offenbar hat sich das Prinzip an sich als so vorteilhaft erwiesen, daß es mit unterschiedlichen Zellbestandteilen verwirklicht wurde. Es beruht auf einer Rückkopplungsschleife, bei der ein bestimmter zelleigener Stoff nach einiger Zeit die Aktivität des Gens, das ihn liefert, und damit seine Neubildung blockiert. Durch den dann eintretenden Mangel an dieser Substanz wird der Zyklus unter Beteiligung weiterer Proteine neu gestartet. Bei höheren Lebewesen sind oft mehrere Rückkopplungsschleifen ineinander verwoben. bh

4.1.1 Harmonische Schwingungen

Eine harmonische Schwingung ist die Lösung der Bewegungsgleichung für eine Größe, die in jedem Augenblick ihrer zweiten Ableitung nach der Zeit proportional, aber entgegengesetzt ist. Die Winkelgeschwindigkeit ist nur durch die Größen der Bewegungsgleichung bestimmt, sie ist unabhängig von der Amplitude. Die Amplitude ist frei wählbar, sie ist konstant und behält deshalb ihren Wert der maximalen Auslenkung bei Beginn der Schwingung („Anfangswert“) bei.

Formel	Erläuterung
$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$	Bewegungsgleichung des „harmonischen Oszillators“
$x(t) = x_0 \cdot \sin(\varpi t + \varphi_0)$	Lösung der Gleichung: Die „harmonische Schwingung“
x_0	Amplitude, jeder Wert erfüllt die Bewegungsgleichung
$\varpi \cdot t + \varphi_0$	Phase, φ_0 Anfangsphase



Mit diesem Lösungsansatz ergibt sich:	
$\ddot{x}(t) = -x_0 \cdot \varpi^2 \cdot \sin(\varpi t + \varphi_0)$	Zweite Ableitung der Funktion
$m \cdot \varpi^2 = k$	$x(t)$ und $\ddot{x}(t)$ in die Bewegungsgleichung eingesetzt
Es folgen die Lösung für die Winkelgeschwindigkeit, r und φ_0 sind beliebig wählbar:	
$\varpi = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Winkelgeschwindigkeit, T ist die Periode der Schwingung

Tabelle 1 Die harmonische Schwingung.

(vgl. . http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/V1_5Schwingung.DOC - Schwingung)

4.1.2 Überlagerung und Zerlegung von Schwingungen

Schwingungen können überlagert werden. Man konstruiert dazu den Zeiger der Summe als vektorielle Summe der Zeiger der Komponenten im Zeigerdiagramm. Außer diesen harmonischen Schwingungen gibt es Rechteck- und Sägezahnschwingungen, die als Summe harmonischer Schwingungen dargestellt werden können. Diese Zerlegung bezeichnet man als Fourier-Analyse (Näheres folgt beim Kapitel über Optik).

Versuch 1 Sinus- Sägezahn- und Rechteck-Schwingung am Oszilloskop

4.1.2.1 Lissajous-Figuren

Lissajous Figuren entstehen, wenn die Auslenkung einer Schwingung gegen die zeitgleiche Auslenkung einer zweiten Schwingung aufgetragen wird. Das entstehende Bild hängt vom

Verhältnis der Frequenzen beider Komponenten und von der Phasenlage beider Schwingungen ab. Feststehende, geschlossene Kurven erhält man, wenn sich die Frequenzen wie ganze Zahlen verhalten. In der Abbildung wurden als Beispiel die Lissajous Figuren für die Frequenzverhältnisse 1:2 und 1:2,1 berechnet. Durch Beobachtung der Lissajous Figur kann man Frequenzen gut vergleichen und auf Vielfache voneinander abstimmen.

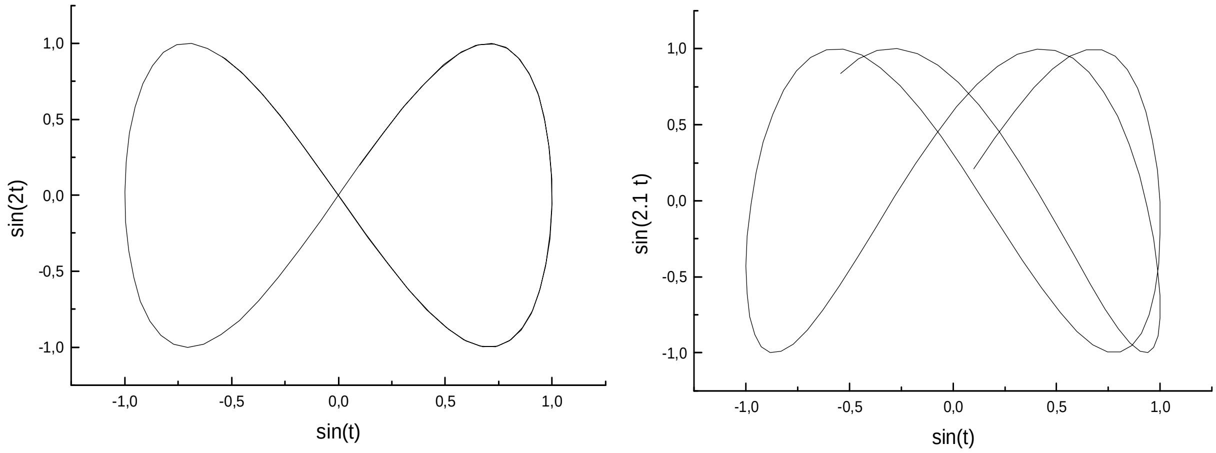


Abbildung 2 Lissajous Figuren für das Frequenzverhältnis y: x=2:1 (links) und y:x=2,1:1 (rechts).

Versuch 2 Lissajous Figuren für unterschiedliche Frequenzen an der x- und y- Achse des Oszilloskops

4.1.2.2 Schwebungen

Werden Schwingungen mit gleicher Ausbreitungsrichtung überlagert und unterscheiden sich die Frequenzen nur wenig, dann erhält man eine neue Frequenz, die der Schwebung. Die Einhüllende der Summe beider Komponenten zeigt eine Modulation, die in auf- und abschwellender Lautstärke, der Schwebung, hörbar wird.

Versuch 3 Schwebung: Überlagerung von Schwingungen ähnlicher Frequenz bis zur Überlagerung von um eine Oktave entfernten Schwingungen

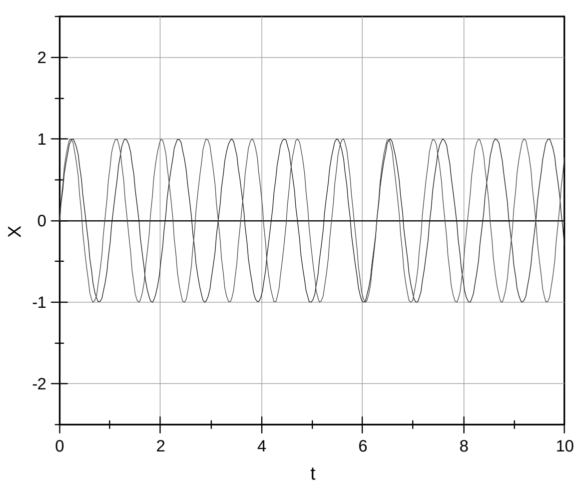
<table>
<tr><td colspan="2">Schwingungen, die sich additiv überlagern:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>$x_1 = A \cdot \sin \varpi \cdot t$</td></tr>
<tr><td>$x_2 = A \cdot \sin(\varpi + \Delta) \cdot t$</td></tr>
</table>

Tabelle 2 Zwei Grundschwingungen (blau mit Frequenz ϖ , rot mit Frequenz $\varpi + \Delta$), die bei ihrer Addition zur Schwebung führen

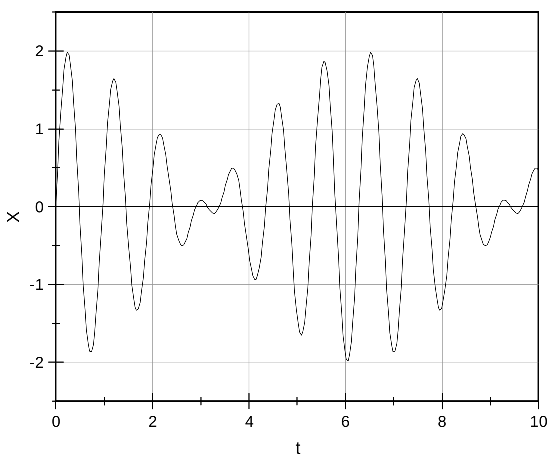
<table>
<tr><td colspan="2">Die Überlagerung $x = x_1 + x_2$ von Schwingungen ähnlicher Frequenz heißt Schwebung, sie ist die Frequenz der Einhüllenden der Summe der Komponenten:</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Überlagerung beider Schwingungen, die Schwebungsfrequenz ist $\frac{\Delta}{2}$. Die Berechnung ist in komplexer Schreibweise am klarsten:</td></tr>
<tr><td>$x = A \cdot (\sin \varpi \cdot t + \sin(\varpi + \Delta) \cdot t$
$\xi = e^{i\varpi t} + e^{i(\varpi+\Delta)t} = e^{i\varpi t} \cdot (1 + e^{i\Delta t})$
$= e^{i\varpi t} \cdot (e^{i\frac{\Delta}{2}t} \cdot e^{-i\frac{\Delta}{2}t} + e^{i\frac{\Delta}{2}t} \cdot e^{i\frac{\Delta}{2}t})$
$= e^{i\left(\varpi + \frac{\Delta}{2}\right) \cdot t} \cdot 2 \cdot \cos \frac{\Delta}{2} t$</td></tr>
<tr><td>$x = \mathrm{Re}(\xi) = 2 \cdot \sin\left(\omega + \frac{\Delta}{2}\right) t \cdot \cos \frac{\Delta}{2} t$</td></tr>
</table>

Tabelle 3 Schwebungen: Addition von zwei Schwingungen, deren Frequenzen sich nur wenig unterscheiden.

4.1.3 Gedämpfte Schwingungen

Die harmonische Schwingung wird, wie jede Bewegung unter realen Bedingungen, durch Reibung gedämpft. Wird keine Energie zugeführt, dann klingt die Schwingung nach einiger Zeit ab, indem ihre Amplitude immer kleiner wird. Die mathematische Behandlung zeigt, daß die Amplitude exponentiell mit der Zeit abklingt. Dazu wird die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators um einen Term für die Reibungskraft erweitert, der proportional zur Geschwindigkeit ist. Wird die Dämpfung immer stärker, dann geht schließlich eine einmalige Auslenkung exponentiell gedämpft in die Ruhelage zurück. Der aperiodische Grenzfall ist erreicht. Bei noch höherer Dämpfung wird die Rückkehr in die Ruhelage als „Kriechen“ bezeichnet.

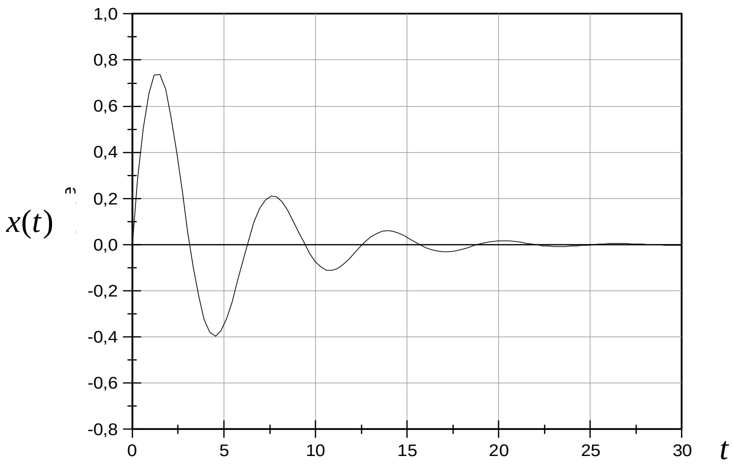
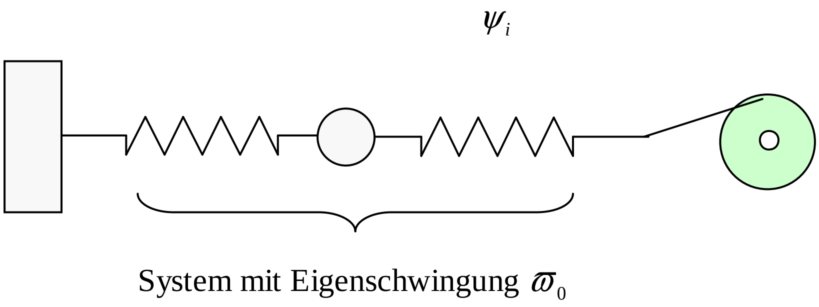


Abbildung 3 Gedämpfte Schwingung: $x(t) = \sin(t) \cdot e^{-0.2 \cdot t}$

(Herleitung: http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/V4_2A_Daempfung.DOC)

4.1.4 Erzwungene Schwingung

Wird ein zur freien Schwingung fähiges System, seine Eigenfrequenz sei ϖ_0, durch einen äußeren Antrieb mit Frequenz ϖ in Bewegung gesetzt, dann bewegt sich das System mit der Frequenz des Antriebs. Das System reagiert auf unterschiedliche Antriebsfrequenzen mit Änderungen in Amplitude und der Phase:



Die Amplitude der Auslenkung hängt ab vom Verhältnis der Antriebs- zur Eigenfrequenz. Das Gleiche gilt für die Phase zwischen der Auslenkung des Antriebs und der des Systems. In Worten des Alltags: Bei zu hoher Frequenz des Antriebs kommt der Oszillator nicht mehr mit, er zittert nur noch im Gegentakt zum Antrieb, also mit einer halben Periode Phasenverschiebung, und die Amplitude ist klein. Wird die Antriebsfrequenz bis zur Eigenfrequenz verkleinert, dann kommt das System in Resonanz. Der Antrieb läuft der Schwingung des Systems nur noch um eine viertel Periode voraus, die Amplitude wird immer größer. Ohne Dämpfung kommt es zur „Resonanzkatastrophe“: Ein reales System zerfällt, weil die Amplituden jedes Maß überschreiten.

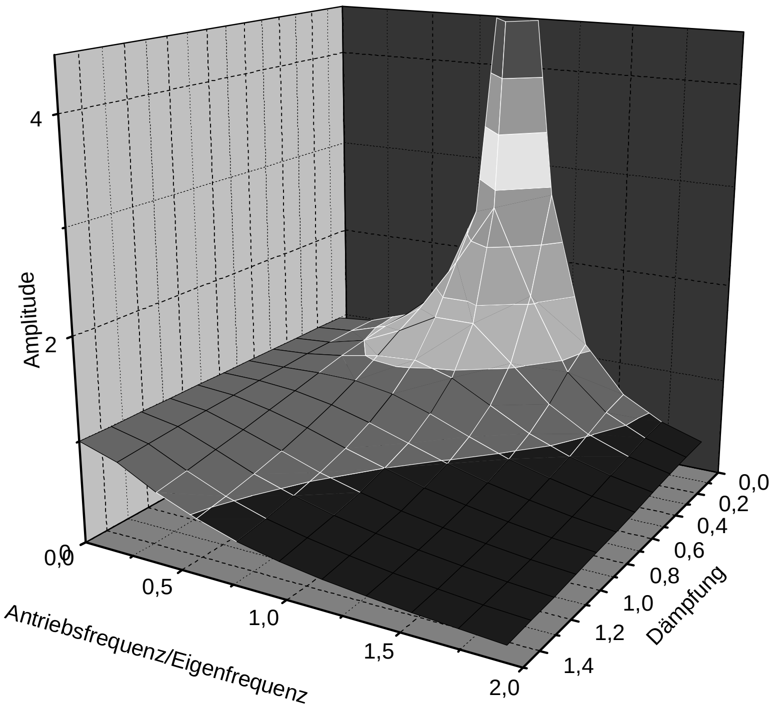


Abbildung 4 Amplitude einer erzwungenen Schwingung in Abhängigkeit von dem Verhältnis zwischen Antriebs- und Eigenfrequenz und der Dämpfung. Die Resonanzkurve wird mit abnehmender Dämpfung schärfer

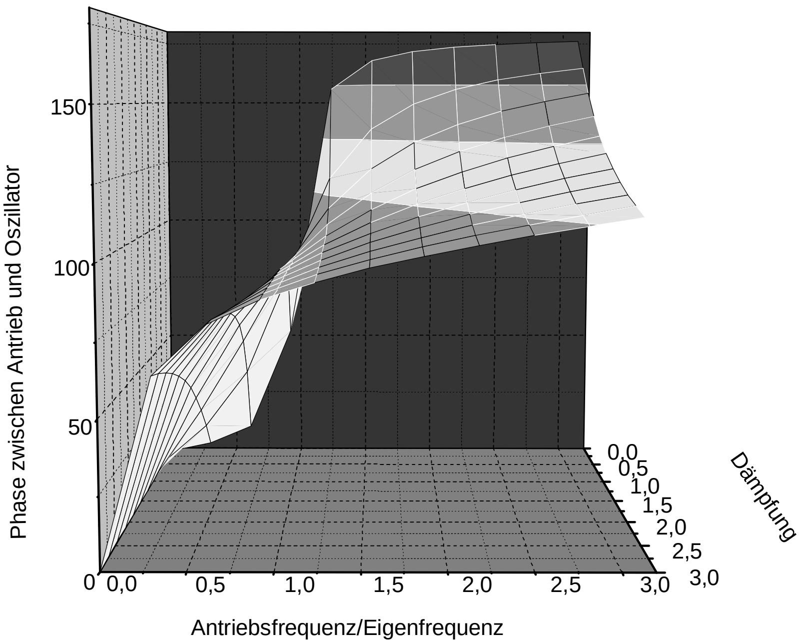


Abbildung 5 Phase zwischen Antrieb und Schwingung des Systems in Abhängigkeit des Verhältnisses zwischen den Amplituden und der Dämpfung

Liegt die Antriebsfrequenz unterhalb der Eigenfrequenz, dann läuft das System dem Antrieb mit nur wenig Abweichung in Amplitude und Phase nach.

Man erkennt an den Bildern, daß bei genügend großer Dämpfung die Amplitude bei der Resonanzfrequenz nicht mehr überhöht ist. An den Phasen ist aber auch dann zu erkennen, ob die Antriebsfrequenz kleiner oder größer als die Eigenfrequenz des freien Systems ist.

Versuch 4 Erzwungene Schwingung: Die Eigenfrequenz des freien Systems liegt bei70 Hz. Man steigert die Antriebsfrequenz, beginnend bei 65 Hz und fährt über die Resonanzstelle zu höheren Frequenzen.

Versuch 5 Resonante Anregung von 3 Pendeln unterschiedlicher Eigenfrequenzen.

Versuch 6 Im Zungenfrequenzmesser stehen Zungen unterschiedlicher Eigenfrequenz bereit, die in Resonanz befindliche zeigt die Frequenz der Erregung.

4.1.5 Eigenschwingungen, gekoppelte Systeme

Dieses Thema ist deshalb so wichtig, weil Moleküle und kristalline Festkörper Systeme mechanisch gekoppelter Oszillatoren sind. Nur aus dieser Sicht ist ihr Verhalten bei Zufuhr von Wärme zu verstehen. Die Wechselwirkungskräfte zwischen den Atomen folgen bei kleinen Auslenkungen annähernd dem Hookeschen Gesetz. Die Temperaturbewegung der umgebenden Teilchen regt jedes Einzelne zur Schwingung an. Das bei einer Momentaufnahme zufällig erscheinende Auslenkungsmuster ist eine Überlagerung spezieller Schwingungszustände, den Eigenschwingungen, die für jedes System spezifisch sind. Das wichtigste und einfachste gekoppelte System ist das *Doppelpendel*, das als Modell für ein zweiatomiges Molekül verstanden werden kann. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse erlauben einen Ausblick auf gekoppelte Systeme mit beliebig vielen Teilchen.

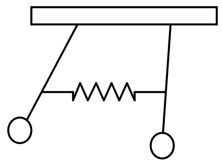
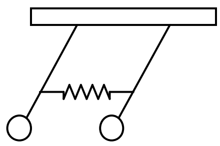
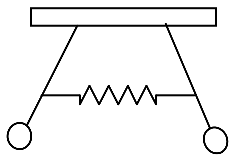
Bewegungsart	Auslenkungsmuster	Auslenkung	Anmerkung
Beliebig. Durch Vermittlung der Feder wandert die E-nergie zwischen den Pendeln hin und her.		Beliebig	Die Pendel schwingen ab-wechselnd stärker und schwächer, während eines steht schwingt das andere maximal. Die Feder wird abwechselnd beansprucht.
Eigenschwingungen: Beide Pendel schwin-gen zeitlich konstant. Es wird keine Energie zwischen den Pendeln ausgetauscht.		Mit gleicher Amplitude in gleiche Richtung	Erste Eigenschwingung: Die Pendel schwingen in Gleichphase mit der Eigen-frequenz der freien Pendel, die Feder wird gar nicht beansprucht.
		Mit gleicher Amplitude in entgegenge-setzte Rich-tung	Zweite Eigenschwingung: Die Pendel schwingen in Gegenphase, die Feder ist immer in Aktion

Tabelle 4 Schwingungszustände des Doppelpendels

Die Eigenschwingungen sind kollektive Schwingungszustände des ganzen Systems, die sich dadurch auszeichnen, daß jeder Körper mit konstanter Frequenz und Amplitude schwingt. Zu jeder Eigenschwingung gehört eine bestimmte Frequenz, die Eigenfrequenz, mit der sich alle an dieser Schwingung beteiligten Körper bewegen. Die Auslenkungsmuster von Eigen-schwingungen unterscheiden sich in ihrer Symmetrie und stehen orthogonal zueinander, d. h., das Skalarprodukt zwischen Auslenkungen zu unterschiedlichen Eigenschwingungen ist Null.

Die Anzahl der Eigenschwingungen entspricht immer der Anzahl der *Freiheitsgrade*: Das ist das Produkt aus der Anzahl N der Teilchen und den unabhängigen Richtungen für die Aus-lenkungen, das sind im Raum die Richtungen x, y und z. Daraus folgen $3N$ Freiheitsgrade. Im Doppelpendel gibt es 2 „Teilchen", die aber jeweils nur einen Freiheitsgrad zeigen, nämlich die Auslenkung in eine einzige Richtung. Deshalb gibt es gerade 2 Eigenschwingungen. All-gemein gilt: Jede beliebige Schwingung eines Systems kann als die Überlagerung seiner Ei-genschwingungen gedeutet werden.

In Systemen mit mehreren Freiheitsgraden kann man die Auslenkungsmuster der Eigen-schwingungen nur schwer durch Anschauung erkennen. Dabei ist hilfreich, dass sich unter-schiedliche Eigenschwingungen in ihren Symmetrieeigenschaften unterscheiden. Es gibt aber ein mathematisches Verfahren, die „Hauptachsentransformation", die aus einem allgemeinen Ansatz der Bewegungsgleichung die Eigenschwingungen errechnet.

Ein Beispiel für Eigenschwingungen in einem 2 atomigen Molekül und einem Festköper mit 2 Teilchen in einer Elementarzelle findet sich in http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/V4_2A_Molekuel.DOC.

Versuch 7 a) Eigenschwingungen des gekoppelten Pendels. Bei Verkürzung eines der Pendel ändern sich die Eigenschwingungen b) Eigenschwingung am Torsionspendel: Die beiden Freiheitsgrade sind Torsion und Dehnung. Man suche die beiden Eigenschwingungen

Versuch 8 Eigenschwingungen der Saite

Versuch 9 Eigenschwingung der kreisförmigen Scheibe

4.2 Wellen

Wellen sind Schwingungen, die sich in *Raum* und *Zeit* ausbreiten. Bei Schwingungen von Teilchen ist nur die Richtung ihrer Auslenkung im Raum definiert, bei der Welle kommt die Richtung ihrer Ausbreitung hinzu. Man spricht von Transversalwellen, wenn die Richtung der Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht, bei Longitudinalwellen sind Auslenkung und Ausbreitung gleichgerichtet.

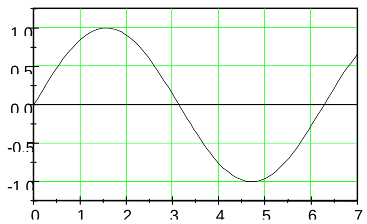
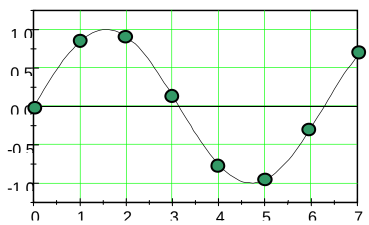
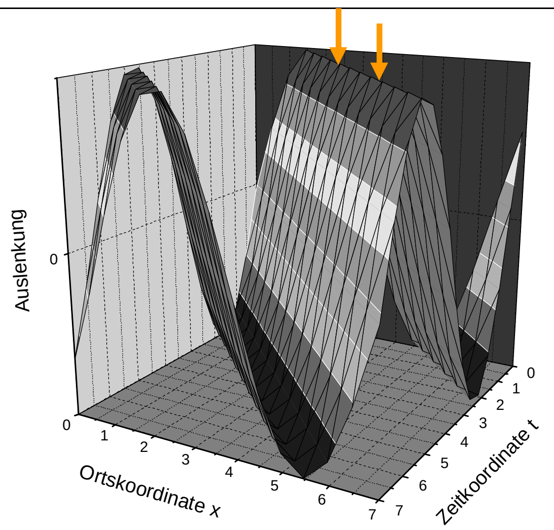
Auslenkung	Argument der Auslenkung
 Zeit t	Sinus-förmige Bewegung eines Teilchens an einem festgehaltenen Ort als Funktion der Zeit $\psi(t) = \sin(t)$
 Ort x	Sinus-förmige Auslenkung der Teilchen zu einer festen Zeit („Momentaufnahme“) $\psi(x) = \sin(x)$
	Auslenkung als Funktion von Ort und Zeit $\psi(x,t) = \sin(x - t)$ Die Pfeile zeigen das Fortschreiten des Maximums von x, t (linker Pfeil) zu $x+\Delta x$, $t+\Delta t$ (rechter Pfeil).

Tabelle 5 Wellen: Auslenkung als Funktion von Raum und Zeit

Versuch 10 Transversalwellen werden an einer drehbaren Spirale gezeigt: Man sieht in der Projektion durch einen Spalt am festen Ort x_0, daß das dort befindliche Teilchen in Abhängigkeit von der Zeit schwingt. Ohne Spalt erkennt man bei stehender Spirale die Sinusförmige Welle als Funktion des Orts. Bei Drehung Spirale sieht man die Ausbreitung der Welle in Raum und Zeit.

4.2.1 Die Wellengleichung

Die Wellengleichung gilt für unterschiedliche Wellenarten, sie läßt sich leicht für eine longitudinale Welle herleiten. In einer linearen Kette seien mehrere Massenpunkte durch Federn miteinander verbunden.

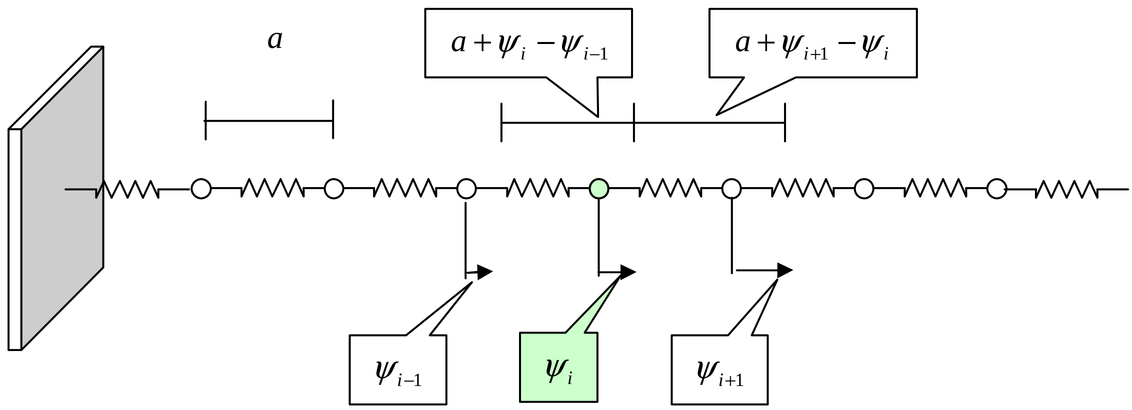


Abbildung 6 Lineare Kette mit Massenpunkte im Abstand a mit Massen m und Federn mit Federkonstante D. Der Vektor ψ_i zeigt die Auslenkung des Teilchens i bei einer Longitudinalschwingung, gleiches gilt für die Nachbarn.

Formel	Anmerkung
$m\cdot\ddot{\psi}_i = D\cdot\left(a+\psi_{i+1}-\psi_i\right)-D\cdot\left(a+\psi_i-\psi_{i-1}\right)$	Bewegungsgleichung für das Teilchen i
$\frac{\psi_{i+1}-\psi_i}{a}=\left.\frac{d\psi}{dx}\right\vert_{x_i+\frac{a}{2}}$ $\frac{\psi_i-\psi_{i-1}}{a}=\left.\frac{d\psi}{dx}\right\vert_{x_i-\frac{a}{2}}$	Die Abstände zu den Nachbarn werden durch die Ableitungen nach x zu beiden Seiten des Teilchens i ersetzt
$\left.\frac{d\psi}{dx}\right\vert_{x_i+\frac{a}{2}}-\left.\frac{d\psi}{dx}\right\vert_{x_i-\frac{a}{2}}=a\cdot\left.\frac{d^2\psi}{dx^2}\right\vert_{x_i}$	Die Differenz der Ableitungen ist die zweite Ableitung nach x. Wird sie in die Bewegungsgleichung eingesetzt, dann erhält man.
$\ddot{\psi}=\frac{D\cdot a^2}{m}\cdot\psi''$	Die Wellengleichung
$\psi(x,t)=\psi_0\cdot\sin\left(k\cdot x-\varpi t\right)$	Ansatz für die Lösung der Wellengleichung
$\ddot{\psi}=-\varpi^2\cdot\psi$ $\psi''=-k^2\cdot\psi$	2. Ableitungen der Lösung
$\ddot{\psi}=-\frac{\varpi^2}{k^2}\cdot\psi''$	Aus dem Vergleich dieser Beziehung mit der Wellengleichung ergibt sich:
$\frac{\varpi^2}{k^2}=\frac{D\cdot a^2}{m}$	

Tabelle 6 Die Wellengleichung und ihre Lösung

4.2.2 Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit beschreibt, wie schnell sich ein Wellenberg im Ortsraum bewegt. Wird der Ort eines Maximums zu zwei Zeiten ermittelt, dann zeigt der Quotient aus Orts- und Zeitdifferenz die Ausbreitungsgeschwindigkeit. . Das Maximum der Welle verschiebt sich in Raum und Zeit von x, t zu $x+\Delta x$, t+ Δt (vgl. Fortschreiten des Maximums).

Formel	Anmerkung
$\varpi = \frac{2\pi}{T}$	Kreisfrequenz, Winkelgeschwindigkeit zur Periode T
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	Wellenzahl zur Wellenlänge λ
$2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} - 2\pi \cdot \frac{t}{T} = \frac{\pi}{2}$	Bedingung für maximale Auslenkung: Das Argument der sin-Funktion ist $\pi/2$
$2\pi \cdot \frac{x+\Delta x}{\lambda} - 2\pi \cdot \frac{t+\Delta t}{T} = \frac{\pi}{2}$	Maximale Auslenkung zur Zeit $t+\Delta t$
$2\pi \cdot \left(\frac{\Delta x}{\lambda} - \frac{\Delta t}{T}\right) = 0$	Differenz beider Gleichungen, daraus folgt:
$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$	Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist der Quotient aus Kreisfrequenz und Wellenzahl
$v^2 = \frac{\lambda^2}{T^2} = \frac{\varpi^2}{k^2} = \frac{D \cdot a^2}{m}$	Aus der Wellengleichung folgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit als Funktion der Materialkonstanten.

Tabelle 7 Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle, Kreisfrequenz und Wellenzahl

Für Wellen in unterschiedlichen Medien zeigt die Wellengleichung die gleiche Gestalt, die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt von den unterschiedlichen Materialeigenschaften ab:

Art der Welle	v^2	Materialkonstante	Medium
Longitudinal	$\frac{E}{\rho}$	E Elastizitätsmodul	Festkörper
Transversal	$\frac{G}{\rho}$	G Scherungsmodul	
Transversal	$\frac{\sigma}{\rho}$	σ Zugspannung	Seil
Longitudinal	$\frac{K}{\rho}$	K Kompressionsmodul	Flüssigkeit
Longitudinal	$\frac{\kappa \cdot p}{\rho}$	p Druck $\kappa = \frac{C_p}{C_V}$	Gas

Tabelle 8 Materialabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit für Wellen

4.2.3 Reflexion, Brechung und Interferenz von Wellen

Weil die Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Dichte des Mediums abhängt, werden Wellen beim Übergang zwischen Medien unterschiedlicher Dichte zum Teil reflektiert und zum Teil durchgelassen, wobei sich die Richtung ändern kann: Die Welle wird gebrochen. Dabei erfolgt die Brechung beim Übergang vom Medium mit größerer Ausbreitungsgeschwindigkeit (kleinere Dichte) zu dem mit kleinerer (höhere Dichte) immer zum Lot auf die Grenzfläche hin. Diese Effekte sind vor allem in der Optik und allgemein für elektromagnetische Wellen von großer Bedeutung, sie treten aber ebenso bei mechanischen Wellen auf. Als Interferenz bezeichnet man die Überlagerung von Wellen, die von unterschiedlichen Orten ausgehen.

Versuch 11 In einer Wasserwanne mit flachem Ufer, um Reflektionen zu vermeiden, werden mit einem Oszillator Kugel- und Planwellen erzeugt. Die Planwelle wird a) mit einem Parabolspiegel fokussiert b) an einem Spalt gebeugt c) an einer Plexiglasplatte zum Lot hin gebrochen. Mit einer 2-Punkt Anregung werden Interferenzen beobachtet: Von unterschiedlichen Punkten ausgehende Wellen überlagern sich.

4.2.4 Stehende Wellen

Wird eine Welle an einem Medium reflektiert, dann interferiert sie mit sich selbst. Die einlaufende und die auslaufende Welle überlagern sich, man erhält eine stehende Welle. In Abhängigkeit von der Dichte des Mediums, an dem reflektiert wird, entstehen an der Grenze „Knoten“ oder „Bäuche“. Damit immer eine konstruktive Interferenz möglich ist, muß die Länge des schwingenden Mediums auf die Wellenlänge abgestimmt sein:

Ende / Anfang	Dicht (Knoten)	Dünn (Bauch)
Dicht (Knoten)	$n \cdot \frac{\lambda}{2}$	$(2n+1) \cdot \frac{\lambda}{4}$
Dünn (Bauch)	$(2n+1) \cdot \frac{\lambda}{4}$	$n \cdot \frac{\lambda}{2}$

Tabelle 9 Längen eines Trägers für stehende Wellen im Verhältnis zur Wellenlänge bei unterschiedlich abgeschlossenen Enden

Versuch 12 Stehende Wellen werden mit zwei gegenläufigen Spiralen gezeigt

Versuch 13 Eine stehende Transversalwelle wird mit 30, 60 und 90 Hz angeregt

Versuch 14 Eine eingespannte Feder wird zu Schwingungen angeregt, es bilden sich sichtbare Knoten

Versuch 15 Die Wellenmaschine für Transversalwellen erzeugt zunächst stehende, dann laufende Wellen. Abschluß zunächst ohne „Sumpf“: a) Auslenkung oben, die Welle läuft abwärts, wird am freien Ende reflektiert und läuft auf der anderen Seite wieder hoch. b) Wie a), aber mit festem Ende: Die Welle läuft auf der gleichen Seite wie abwärts wieder hoch c) Anregung unten, oben ohne Sumpf: Stehende Wellen d) Anregung unten, oben mit Sumpf: Die Welle läuft unreflektiert aus.