Vorlesung Experimentalphysik I am 13.12.1999 und 14.12.1999 J. Ihringer

3.5 Hydro- und Aerodynamik

Dieser Abschnitt befaßt sich mit strömenden Medien. Während zur Beschreibung eines Körpers bei gleichförmiger Bewegung ein einziger Vektor für den Impuls oder Drehimpuls genügt, beschreibt man die Strömung im Bild der Massenpunkte mit individuellen Bahnen für jeden Massenpunkt und individuellen Geschwindigkeiten für jeden Punkt der Bahn. Man nennt die Bahn eines Massenpunktes Stromfaden. Die Gesamtheit der Vektoren für die Geschwindigkeiten an allen Punkten der Bahn eines Massenpunktes formen die Stromlinie. Wenn Stromfäden und Stromlinien nicht von der Zeit abhängen, dann zeigen beide das gleiche Bild und die Strömung heisst stationär.

Die wichtigste Grundlage der Strömungslehre ist die Forderung nach Erhaltung der Stoffmenge: Was in ein System eintritt, tritt auch wieder aus. Das ist Aussage der *Kontinuitätsgleichung*. Es ist bemerkenswert, daß in Strömungen mit Geschwindigkeiten unterhalb der Schallgeschwindigkeit auch Gase als inkompressibel behandelt werden können, weil sie überall annähernd die gleiche Dichte zeigen.

3.5.1 Strömung idealer Flüssigkeiten

Die Idealisierung bezieht sich auf fehlende Reibung sowohl innerhalb des Mediums als auch zwischen Medium und Wänden. Auch ein Gas kann in diesem Sinn eine ideale Flüssigkeit sein.

3.5.1.1 Die Kontinuitätsgleichung

Das Flüssigkeitsvolumen, welches in der Zeiteinheit durch eine Fläche im Querschnitt des Rohres strömt, wird als Volumenstromstärke bezeichnet. Verengt sich das Volumen, dann beschreibt die Kontinuitätsgleichung die sich ändernde Flußgeschwindigkeit: Die gleiche Stoffmenge wird transportiert, indem die Flußgeschwindigkeit im weiten Rohr mit Querschnitt A_1 kleiner ist als v_2 im engen Rohr mit Querschnitt A_2.

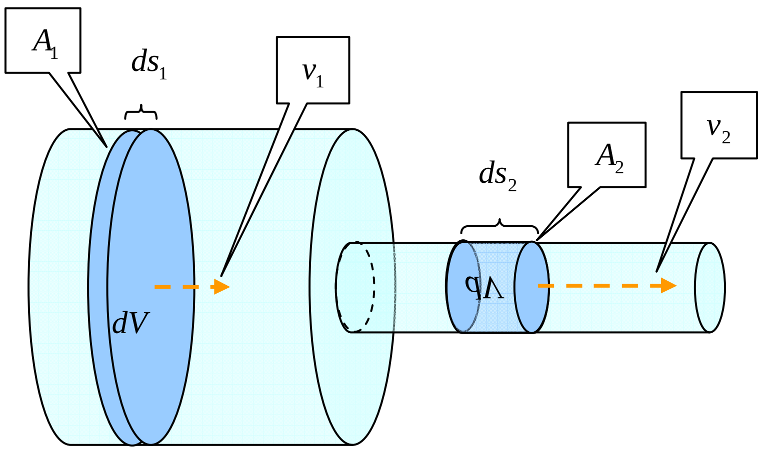


Abbildung 1 Fluß einer idealen Flüssigkeit durch Röhren mit unterschiedlichen Querschnitten A_1 , A_2 und Strömungsgeschwindigkeiten v_1, v_2 . Die Volumenanteile dV seien gleich in beiden Röhren.

Formel	Einheit	Anmerkung
$I = \frac{dV}{dt}$	$1\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$	Volumenstromstärke
dV	m^3	Volumenanteil
dt	s	Zeitintervall
Für inkompressible Flüssigkeiten gilt:		
$dV = A_1 \cdot ds_1 = A_2 \cdot ds_2$		Das in einer Zeit dt transportierte Volumen ist in beiden Röhren gleich. $A_i, ds_i, i = 1{,}2$ sind die Querschnitte und Wegelemente in beiden Röhren. Nach Division durch die Zeit dt folgt:
$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$		Die Kontinuitätsgleichung

Tabelle 1 Volumenstromstärke und Kontinuitätsgleichung

Versuch 1 Die Strombahnen einer stationären Strömung werden sichtbar, wenn Bahnen gefärbten Wassers neben Bahnen ungefärbten Wassers verlaufen. Zunächst verlaufen in der Strömung durch ein quaderförmiges Gefäß alle Bahnen parallel, danach wird ein kreisförmiger und ein langgestreckter Gegenstand nahezu ohne Wirbel umflossen.

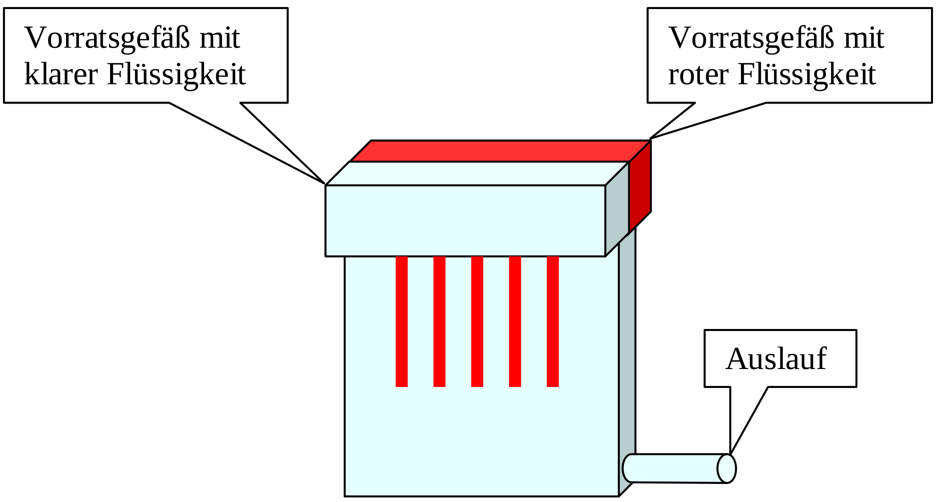


Abbildung 2 Schema des Versuchs, gezeigt kurz nach dem Start. Die Strombahnen haben den Auslauf noch nicht erreicht, unten rechts laufen die gemischten Flüssigkeiten ab.

Versuch 2 In einer Wanne mit strömender Flüssigkeit werden unterschiedlich geformte Objekte umströmt, Luftblasen machen die Strombahnen sichtbar. Man erkennt nicht stationäre Strömung an den Abrißkanten der Objekte.

3.5.1.2 Die Gleichung von Daniel Bernoulli

Fliesst ein Medium reibungsfrei von einem Rohr grossen Durchmessers in ein Rohr kleineren Durchmessers, dann erhöht sich die Transportgeschwindigkeit. Betrachtet man ein Volumenelement des Mediums, dann erhöht sich dessen kinetische Energie. Dieser Energiezuwachs ist gleich der Arbeit zum Verschieben des Mediums zwischen den Rohren, in denen unterschiedliche Drucke herrschen. Aus Energieerhaltungssatz und die Kontinuitätsgleichung folgt der quantitative Zusammenhang zwischen Druck und Transportgeschwindigkeit, formuliert in der „Bernoulli Gleichung“.

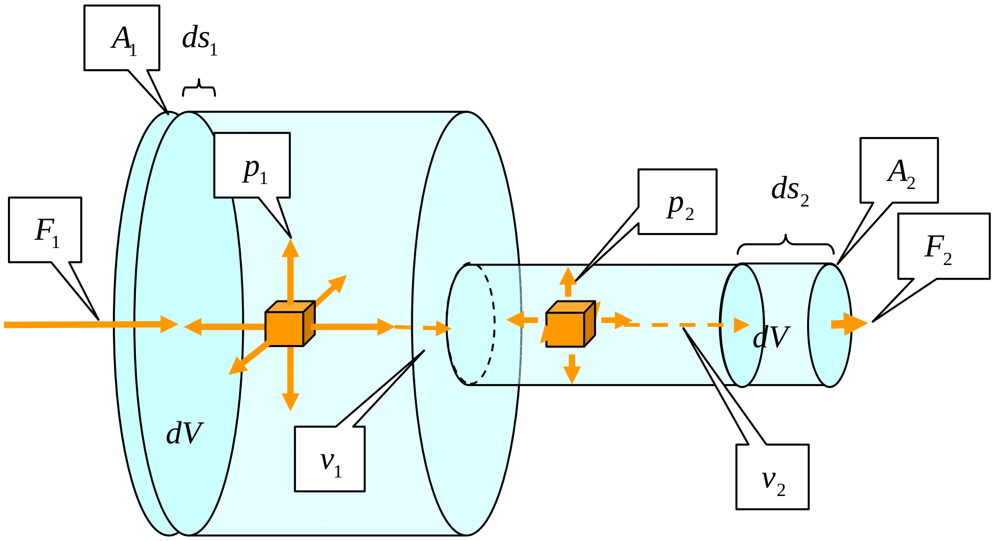
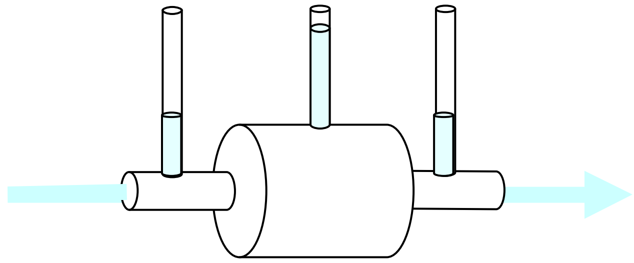


Abbildung 3 Zur Bernoulli Gleichung: Bewegt sich ein Volumenelement dV eines Mediums reibungsfrei von einem Rohr mit Querschnitt A_1 zu einem Rohr mit Querschnitt A_2, dann steigt die Geschwindigkeit (orange, dünn) von v_1 zu v_2, der Druck (Kraftvektoren dazu orange, fett) fällt von p_1 auf p_2. Entsprechend unterschiedlich sind die Kräfte F_1, F_2 auf die Stempelflächen (Die Vektoren sind nur qualitativ gezeichnet). Die Würfel mit den Kraftvektoren sollen zeigen, daß auch im strömenden Medium der Druck isotrop ist.

Formel	Anmerkung
$dV = ds_1 \cdot A_1 = ds_2 \cdot A_2$	Kontinuitätsgleichung für inkompressible Medien
$dW = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^{\;2} - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^{\;2}$	Differenz zwischen den kinetischen Energien in beiden Rohren
$dW = F_1 \cdot ds_1 - F_2 \cdot ds_2$ $= \frac{F_1}{A_1} \cdot A_1 \cdot ds_1 - \frac{F_2}{A_2} \cdot A_2 \cdot ds_2$ $= (p_1 - p_2) \cdot dV$	Differenz zwischen den Arbeiten zur Verschiebung der Stempel mit Flächen A_1 und A_2 um ds_1, ds_2, es gilt $p_i = \frac{F_i}{A_i}$ und $dV = s_i \cdot A_i$, $i = 1{,}2$.
Energieerhaltung: Beide Differenzen sind gleich, mit $m = \rho \cdot dV$ (ρ Dichte des Mediums):	
$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot dV \cdot (v_2^{\;2} - v_1^{\;2}) = (p_1 - p_2) \cdot dV$	Bernoulli Gleichung, verknüpft die Differenz der Drucke mit der Differenz der Quadrate der Strömungsgeschwindigkeiten. Ist, speziell, bei Druck p_1 die Geschwindigkeit v_1 null, dann folgt:
$p_0 - p_v = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$	Bernoulli Gleichung für Druck p_0 bei Strömungsgeschwindigkeit 0 und p_v bei Geschwindigkeit v

Tabelle 2 Herleitung der Bernoulli Gleichung für reibungsfrei strömende Flüssigkeiten

Versuch 3: Zur Bernoulli-Gleichung: Drucke in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit in einer Flüssigkeit: Die Steigrohre zeigen den niedrigen Druck in den Rohren mit *kleinem Querschnitt, also hoher Strömungsgeschwindigkeit im Vergleich zum hohen Druck im Rohr mit großem Querschnitt und kleiner Strömungsgeschwindigkeit.*



Versuch 4: Analog zu Versuch 3, aber mit Luft als strömendem Medium: Die Druckverhältnisse in Strömungen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit werden für Gase gezeigt.

Versuch 5: Hydrodynamisches Paradoxon: Ein Deckel wird von selbst auf eine Düse mit schnell ausströmender Luft gezogen. Im Bereich des Gasaustritts ist die Geschwindigkeit am höchsten und der Druck am kleinsten, der Atmosphärendruck drückt deshalb den Deckel auf die Düse.

Versuch 6 Wasserstrahlpumpe. Schnell aus einer Düse fließendes Wasser reißt die Gasteilchen aus der Umgebung mit. In der Umgebung entsteht damit ein Unterdruck mit dem Dampfdruck des Wassers (15-20 mbar) als untere Grenze.

3.5.1.3 Messung von Drucken und Geschwindigkeiten in Strömungen

Unterhalb der Schallgeschwindigkeit ist die Dichte des strömenden Mediums praktisch überall konstant. Deshalb erlaubt die Bernoulli-Gleichung, die Geschwindigkeit der Strömung aus zwei Druckmessungen zu ermitteln. Die Benennung der Drucke bezieht sich auf die Messung der Geschwindigkeit eines Fahrzeugs, das sich im ruhenden Medium bewegt.

Der höhere „dynamische“ Druck wird in der Spitze eines am Fahrzeug befestigten und in Strömungsrichtung orientierten, symmetrischen Objekts gemessen. Weil die Richtung der Strömung zu beiden Seiten der Symmetrieachse von entgegengesetzter Richtung ist und sich beim Übergang stetig ändert, ist im „Staupunkt“ auf der Symmetrieachse die Geschwindigkeit der Strömung bezüglich der Messfläche null.

Der tiefere, „statische“ Druck ist z. B. der gewöhnliche Luftdruck, er wird mit einem feststehenden Manometer außerhalb des Fahrzeugs gemessen. Mit einem am Fahrzeug befestigten Manometer kann er nur dann gemessen werden, wenn dessen Membran parallel zur Bewegungsrichtung liegt.

Die Differenz beider Drucke, der „Staudruck“, ist nach der Bernoulli-Gleichung proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit.

Die Geschwindigkeit der Strömung eines Mediums bezüglich dem ruhenden Labor wird auf analoge Weise gemessen. Auch in der Strömung ist der Druck isotrop. Bei der Messung ist nur darauf zu achten, dass das Instrument die Geschwindigkeit der Strömung nicht verändert. Die Messvorschriften sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

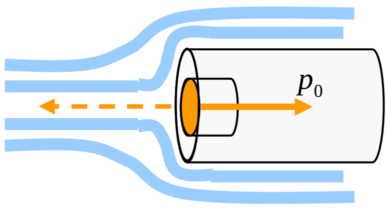
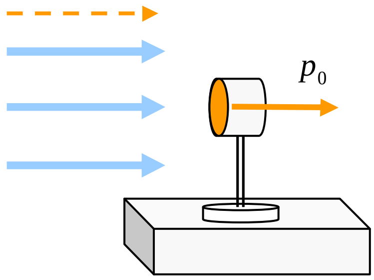
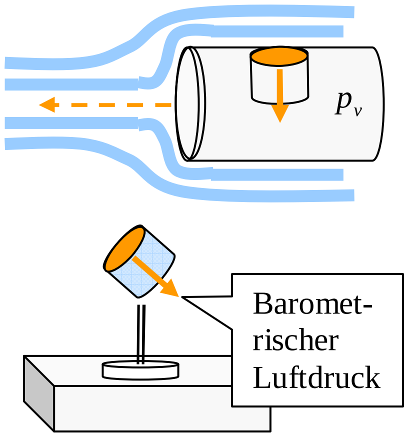
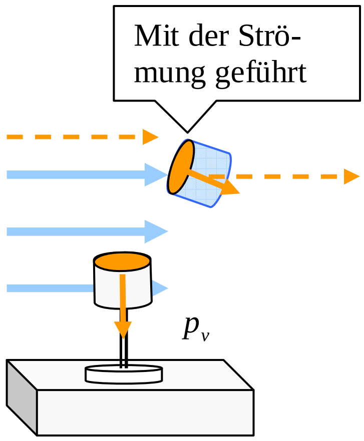
Drucke in einer Strömung und ihre Bezeichnung	Messgeometrie	
	Strömung bei Bewegung eines Körpers im ruhenden Medium (z. B. Flugzeug in Luft)	Strömung eines Mediums bezüglich dem ruhenden Labor
Dynamischer Druck, Pitot-Druck p_0 Druck auf eine senkrecht zur Strömungsrichtung stehende Platte, die *nicht* mit der Strömung geführt wird. Unmittelbar vor der Platte, im „Staupunkt“, ist die Strömungsgeschwindigkeit null.		
Statischer Druck p_v Druck auf eine parallel zur Strömung liegende Platte. Diesen Druck zeigt auch ein *mit der Strömung geführtes*, beliebig ausgerichtetes Manometer. Im Flugzeug ist der statische Druck gleich dem barometrischen Luftdruck in Flughöhe.		
Staudruck (Bernoulli-Gleichung) $p_0 - p_v = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$		

Tabelle 3 Messung des Drucks in einer Strömung. Das Messinstrument ist als Druckdose dargestellt, mit druckempfindlicher Membran (orange), die den Druck in eine zum Druck proportionale Kraft (oranger Vektor) umsetzt. Blau: Richtung der Strömung und Stromlinien, orange strichliert: Vektor der Geschwindigkeit

3.5.1.4 Staurohre

Zur Messung des Staudrucks dienen Staurohre, die bei Ausrichtung entgegen der Strömung aufgrund ihrer Rotationssymmetrie an ihrer Spitze einen Staupunkt zeigen. Im Prandtlschen Staurohr (Ludwig Prandtl, 1875-1953) wird an der Spitze der dynamische Druck und am Mantel der statische Druck gemessen. Das Manometer zeigt das Quadrat der Geschwindigkeit als Druckdifferenz zwischen dem dynamischen und dem statischen Druck.

Henri Pitot (1695-1771) erfand das nach ihm benannte Staurohr zur Messung der Strömung in Flüssen und Kanälen. Pitot Staurohre werden in Flugzeugen zur Messung der Geschwindigkeit eingesetzt. Sie messen nur den dynamischen Druck, den „Pitot-Druck". Der statische Druck, der zur Berechnung der Geschwindigkeit nach der Bernoulli Gleichung nötig ist, wird zu beiden Seiten des Rumpfes an den „static ports" erfaßt. Das Staurohr ist als Teil des Staurohr- und Statik- Drucksystems direkt mit der Geschwindigkeitsanzeige verbunden, die den Staudruck auf einer meist auf Knoten geeichten Skala als Geschwindigkeit anzeigt.

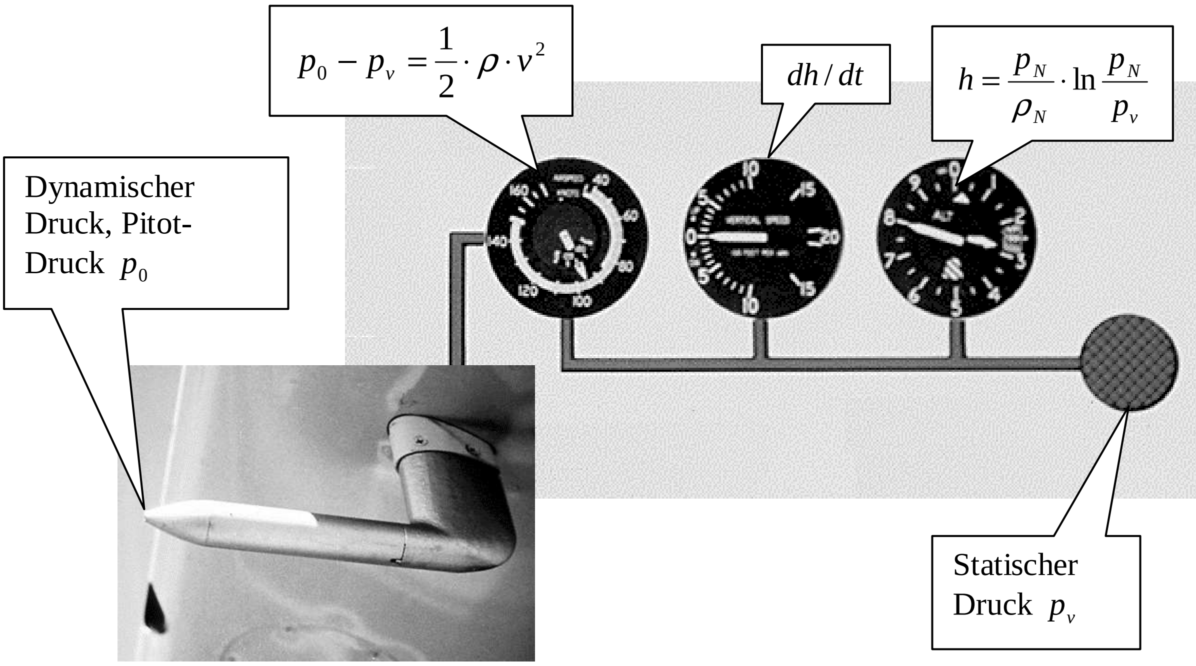


Abbildung 4 Pitot Staurohr und das Drucksystem im Flugzeug. Nur der statische Druck (Luftdruck außerhalb des Flugzeugs) dient zur Höhenmessung (Instrument rechts) mit Hilfe der barometrischen Höhenformel, p_N und ρ_N sind Luftdruck und Dichte in Meereshöhe, und zur Bestimmung der Steig- und Sinkgeschwindigkeit (Instrument in der Mitte).

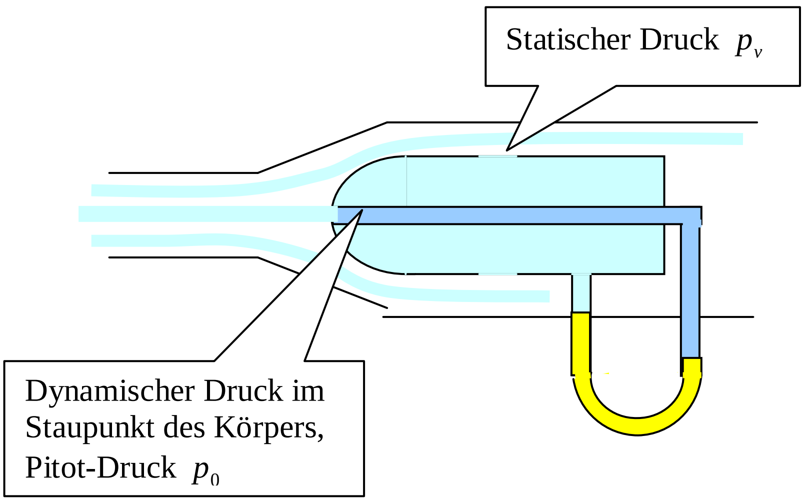


Abbildung 5 Schema des Prandtlschen Staurohrs.

Versuch 7 Prandtlsches Staurohr. Der angezeigte Druck ist ein Maß für die Strömungsgeschwindigkeit in der Umgebung des Rohres

3.5.2 Strömung realer Flüssigkeiten

Anstelle der idealen Flüssigkeiten tritt jetzt ein reales Medium, bei dem innere Reibungsverluste auftreten können. Im Bild der laminaren Strömung gleiten benachbarte Schichten des Mediums nur unter Kraftaufwand aufeinander ab.

3.5.2.1 Laminare Strömung, Newtonsche Gleichung

Bei laminarer Strömung eines Mediums zwischen Wänden geht man davon aus, daß sich die an die Wände angrenzenden Schichten mit der Geschwindigkeit der jeweiligen Wand bewegen. Bei ebenen Wänden unterschiedlicher Geschwindigkeiten bildet sich im Medium dazwischen ein lineares Geschwindigkeitsprofil.

Versuch 8 Linearer Druckabfall in Strömungsrichtung bei laminarer Strömung zwischen Wänden. Die Druckkraft muß die Reibungskraft überwinden.

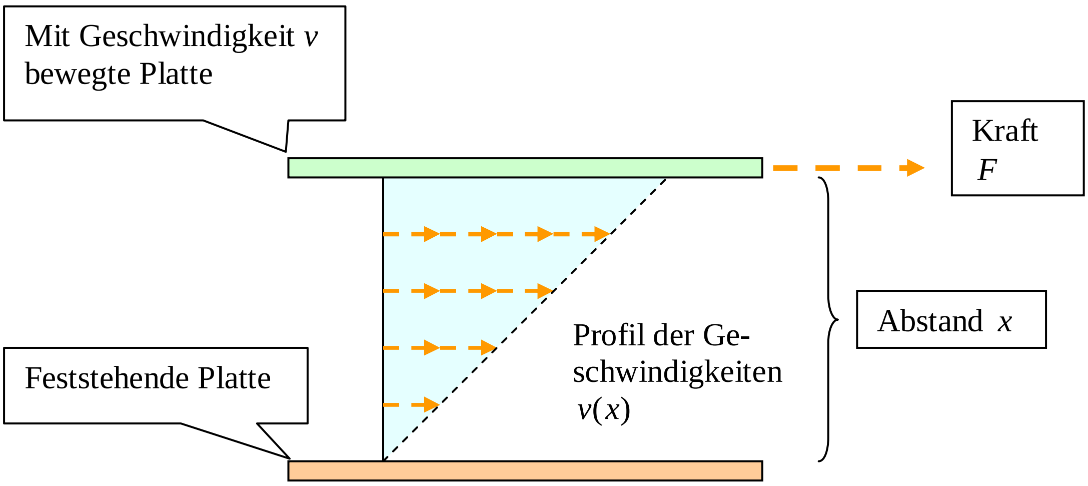


Abbildung 6 Geschwindigkeitsprofil in einer Flüssigkeit zwischen einer feststehenden und einer mit Geschwindigkeit v bewegten Platte bei laminarer Strömung. Die Pfeile zeigen die Geschwindigkeiten benachbarter Schichten.

Die bei laminarer Strömung nötige Kraft zur Relativbewegung zweier Schichten ist von ihrem Abstand, ihrer Geschwindigkeitsdifferenz und der Viskosität des Mediums abhängig.

Formel	Einheit	Anmerkung
$F = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dx}$	N	Allgemein: Kraft zur Bewegung einer Schicht der Dicke dx mit Geschwindigkeit dv gegenüber der Nachbarschicht.
$F = \eta \cdot A \cdot \frac{v}{x}$	N	Speziell: „Newtonsche Gleichung“, Kraft zwischen zwei Schichten im Abstand x, die mit Geschwindigkeit v gegeneinander bewegt werden.
η	$1 \frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{m}^2} = 10\ \mathrm{P}$ (Poise)	Viskosität der Flüssigkeit
A	m^2	Fläche der Schicht

Tabelle 4 Newtonsche Gleichung

3.5.2.2 Strömung in einem Rohr: Das Hagen-Poiseuillesche Gesetz

Strömt eine Flüssigkeit durch ein Rohr, dann muß die Reibungskraft von der Druckkraft aufgebracht werden. Daraus ergibt sich eine Beziehung zwischen der Volumenstromstärke und dem Radius des Rohres, das Hagen-Poiseuillesche Gesetz. Es ist eines der wenigen physikalischen Gesetze, in denen die vierte Potenz einer Größe vorkommt: Die Volumenstromstärke nimmt mit der vierten Potenz des Radius zu. Der Betrag der Flußgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Radius zeigt ein parabelförmiges Profil.

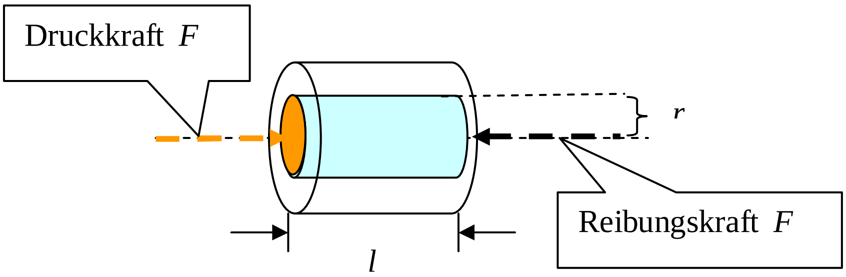


Abbildung 7 Zur Herleitung des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes: Die Reibungskraft der Mantelfläche bei Bewegung des Zylinders aus Flüssigkeit mit Geschwindigkeit v ist gleich der Druckkraft auf die Zylinderfläche

Formel	Anmerkung
$F = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dr}$	Reibungskraft bei laminarer Strömung
$F = \pi \cdot r^2 \cdot (p_1 - p_2)$	Druckkraft auf die Deckfläche des Zylinders mit Radius r /*um den Reibungswiderstand zwischen dem Zylindermantel mit diesem Radius und dessen Nachbarschicht zu überwinden
$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l$	Fläche des Zylindermantels der Länge l
Reibungs- und Druckkraft werden gleichgesetzt:	
$\eta \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \frac{dv}{dr} = \pi \cdot r^2 \cdot (p_1 - p_2)$	Die Reibungs- ist gleich der Druckkraft. Mit der Mantelfläche eingesetzt flogt
$dv = \frac{p_2 - p_1}{2 \cdot \eta \cdot l} \cdot r \cdot dr$	Differentialgleichung für v, r
$v(r) = v_0 - \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \eta \cdot l} \cdot r^2$	Nach Integration erhält man ein parabelförmiges Geschwindigkeitsprofil, mit
$v_0 = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \eta \cdot l} \cdot R^2$	Integrationskonstante, um $v(R) = 0$ zu erhalten

Versuch 9 In der Strömung durch ein Rohr wird das parabelförmige Geschwindigkeitsprofil durch „Verziehen" eines Fadens aus gefärbter Flüssigkeit sichtbar.

Berechnung der Volumenstromstärke I	
$I=\dfrac{dV}{dt}$	Definition der Volumenstromstärke
$dV=2\cdot\pi\cdot r\cdot dr\cdot v(r)\cdot dt$	Fluß durch einen Kreisring mit Radius r und Dicke dr in der Zeit dt
$I_{Kreisring}=2\cdot\pi\cdot r\cdot v(r)\cdot dr$	Volumenstromstärke durch den Kreisring
$I=\int\limits_0^R 2\cdot\pi\cdot r\cdot v(r)\cdot dr$	$v(r)=v_0-\dfrac{p_1-p_2}{4\cdot\eta\cdot l}\cdot r^2$ eingesetzt: Die Volumenstromstärke durch das Rohr nimmt mit der vierten Potenz des Radius zu
$I=2\cdot\pi\cdot\dfrac{p_1-p_2}{4\cdot\eta\cdot l}\cdot\left(\int\limits_0^R R^2\cdot r\cdot dr-\int\limits_0^R r^3\cdot dr\right)$	
$I=\dfrac{\pi\cdot(p_1-p_2)}{8\cdot\eta\cdot l}\cdot R^4$	

Tabelle 5 Herleitung des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes

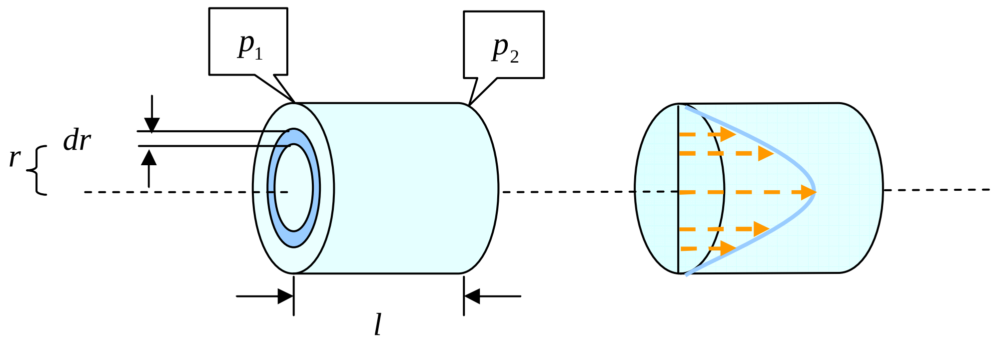


Abbildung 8 Zum Hagen-Poiseuilleschen Gesetz: Parabelförmiges Geschwindigkeitsprofil (orange Vektoren) der Strömungsgeschwindigkeit im Rohr (rechts). Fluß durch einen Zylindermantel mit Radius r, Dicke dr zur Berechnung der Volumenstromstärke (links)

Wie bei allen Reibungsverlusten wird die zur Strömung aufgebrachte Energie in Wärme verwandelt. Analog zu elektrischen Stromkreisen ordnet man den Transportwegen bei der Strömung einen Strömungswiderstand zu, wobei der elektrischen Spannung der Druck entspricht

Formel	Dimension	Anmerkung
$I=\dfrac{\Delta p}{R}$	$1\,\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$	Definition des Strömungswiderstands R
R	$1\,\dfrac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^5}$	Strömungswiderstand

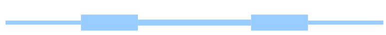
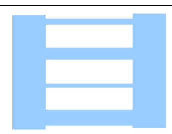
$R_{Gesamt}=\sum\limits_i R_i$	Hintereinanderschaltung	
$\dfrac{1}{R_{Gesamt}}=\sum\limits_i\dfrac{1}{R_i}$	Parallelschaltung	

Tabelle 6 Strömungswiderstand

3.5.2.3 Reibungskraft auf eine Kugel: Das Gesetz von Stokes

Auf eine im viskosen Medium bewegte Kugel wirkt eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft:

Formel	Anmerkung
$F = -6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$	Reibungskraft an der Kugel
v	Geschwindigkeit der Kugel
r	Radius der Kugel
η	Viskosität des Mediums

Tabelle 7 Das Stokessche Gesetz: Reibungskraft auf eine Kugel bei gleichförmiger Bewegung im viskosen Medium

Versuch 10 Zum Stokesschen Gesetz: Fall von Kugeln unterschiedlichen Durchmessers in Glyzerin. Man erkennt, daß sich nach kurzer Beschleunigung konstante Geschwindigkeit einstellt.

3.5.2.4 Die Grenzschicht und die Reynoldsche Zahl, Turbulenz

Reale Strömungen werden bei genügend hohen Geschwindigkeiten turbulent. Bei kleineren Geschwindigkeiten stellt sich an der feststehenden Wand eine Grenzschicht ein, in der bei laminarer Strömung die Geschwindigkeit von 0 an der Wand bis v in der Strömung anwächst. Das außerhalb der Grenzschicht liegende Medium, Gas oder Flüssigkeit, bewegt sich mit annähernd konstanter Geschwindigkeit.
Wird eine Platte in einem viskosen Medium bewegt, dann ist dazu Kraft aufzuwenden. Die Kraft erscheint zunächst als reale Reibungskraft, es muß aber auch - im Bild der laminaren Strömung - ein Stapel von Schichten auf die entsprechende Geschwindigkeit beschleunigt werden. Beide Arbeiten sind gleich, daraus ergibt sich eine Abschätzung für die maximale Dicke der Grenzschicht.

Versuch 11 Die endliche Dicke der Grenzschicht wird an einer in eine Flüssigkeit eingeführten Platte gezeigt

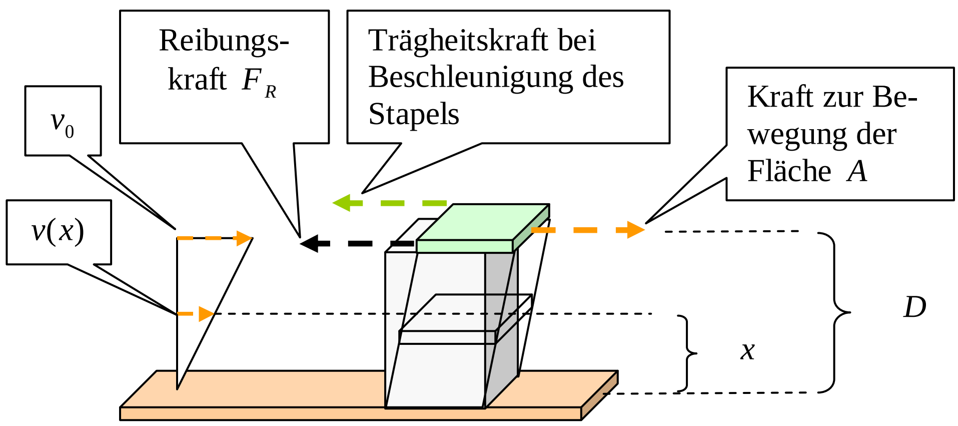


Abbildung 9 Verschiebung einer Flüssigkeit im Bild der laminaren Strömung. Die oberste Schicht wird mit Geschwindigkeit v_0 bewegt, die unterste Schicht ist die feststehende Wand des Gefäßes. Die Kraft zur Bewegung der Fläche kann als Reibungskraft oder als Kraft zur Beschleunigung des Stapels aus Schichten der Dicke dx aufgefasst werden. Links: Das Geschwindigkeitsprofil in Abhängigkeit vom Abstand x zur Wand.

Formel	Anmerkung
Kraft und Arbeit zur Bewegung der obersten Schicht:	
$F_R = 2 \cdot \eta \cdot A \cdot \frac{v_0}{D}$	Newtonsche Gleichung für die Kraft zur Bewegung einer Schicht der Fläche A mit Geschwindigkeit v_0 im Medium mit Viskosität η
$W_R = F_R \cdot l$	Arbeit, um diese Schicht eine Strecke l zu bewegen (Reibungsarbeit)
Arbeit zur Beschleunigung des Stapels	
$dW = \frac{1}{2} m_s \cdot v(x)^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot \frac{v_0^{\ 2}}{D^2} \cdot x^2 \cdot dx$	Arbeit zur Beschleunigung einer Schicht in Höhe x auf die Geschwindigkeit $v(x)$, mit:
$m_S = \rho \cdot A \cdot dx$	Masse einer Schicht
$v(x) = \frac{v_0}{D} \cdot x$	Geschwindigkeit einer Schicht im Abstand x von der Platte
$W = 2 \cdot \int_0^D \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot \frac{v_0^{\ 2}}{D^2} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot v_0^{\ 2} \cdot A \cdot D$	Arbeit zur Beschleunigung des ganzen Stapels
Beide Arbeiten sind gleich:	
$2 \cdot \eta \cdot A \cdot \frac{v_0}{D} \cdot l \geq \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot v_0^{\ 2} \cdot A \cdot D$	Die Arbeit zur Beschleunigung des Stapels auf v_0 ist kleiner oder gleich der zum Bewegen der Platte entlang l, daraus folgt als Abschätzung:
$\frac{\rho \cdot v_0 \cdot l}{\eta} \cdot \left(\frac{D}{l}\right)^2 \leq 1$	Quotient der Arbeit zur Beschleunigung des Stapels und der Reibungsarbeit: Verknüpft alle Konstanten, ist ≤ 1 für laminare Strömung, aber nur dann, wenn Re nicht zu groß wird.
$\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot v_0 \cdot l}{\eta}$	Reynoldsche Zahl für die Bewegung eines Körpers der Länge l mit Geschwindigkeit v_0 im Medium mit Dichte ρ und der Viskosität η
D	Grenzschichtdicke: Maximale Höhe des Stapels, der mit der aufgewendeten Arbeit auf v_0 beschleunigt werden kann.

Tabelle 8 Abschätzung der Grenzschichtdicke für laminare Strömung, Reynoldsche Zahl

Wenn die angenommene Beschleunigung des ganzen Stapels mehr Energie benötigen würde, als durch die tatsächlich aufgebrachte Reibungsarbeit zugeführt wird, dann ist die Strömung nur innerhalb einer Schicht der Dicke D laminar.

Die Reynoldsche Zahl ist der Quotient zwischen der Arbeit zur Beschleunigung des Stapels mit Höhe der Grenzschichtdicke D und der Arbeit gegen die Reibungskraft für einen Körper, dessen Linearausdehnung l gleich der Grenzschichtdicke ist. Für jeden Körper gibt es einen Wert, bei dessen Überschreitung die laminare Strömung abreisst und in turbulente Strömung übergeht: Re>1200 in glatten Rohren, Re>1 für Kugeln. Die Reynoldsche Zahl wächst mit dem Produkt aus Dichte des Mediums, Geschwindigkeit und Linearausdehnung des Körpers. Sie wird kleiner mit zunehmender Viskosität des Mediums.

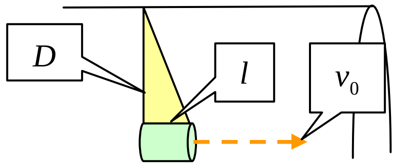
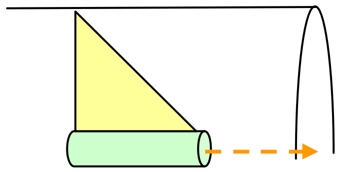
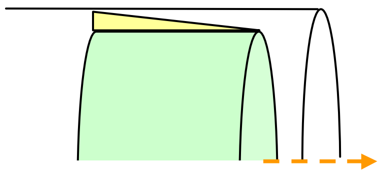
Re	$\frac{D}{l}$	Art der Strömung	Schema der Größenverhältnisse
<<1	>>1	Laminar: Grenzschicht gross gegen die Linearausdehnung des Körpers	
≈ 1	≈ 1	Grenzschicht so groß wie die Linearausdehnung des Körpers	
>>1	<<1	Grenzschicht klein gegen Linearausdehnung, hohes Geschwindigkeitsgefälle: Turbulenzen, Wirbel, bei Re>1200 in glatten Rohren, aber schon bei Re>1 für Kugeln.	

Tabelle 9 Beispiele für unterschiedliche Verhältnisse von Grenzschichtdicke D zur Linearausdehnung l des bewegten Körpers. Die Dreiecke im Schema zeigen die Geschwindigkeitsprofile zwischen dem bewegten Körper in der Mitte und der ruhenden Wand, die symbolisch für das Ende der Grenzschicht steht. Im Bereich außerhalb der Grenzschicht ruht das Medium.

Versuch 12 Laminare- und turbulente Strömung werden bei unterschiedlich schnellem Einlauf eines Flüssigkeitsfadens in ein Flüssigkeitsreservoir gezeigt.

Versuch 13 Mit einer stabilen Wirbelströmung Luft- bzw. Rauchring wird eine Kerze gelöscht

Für laminare Strömung ist der Zusammenhang zwischen Strömungsgeschwindigkeit und Druck in der Bernoulli Gleichung formuliert. Die Verhältnisse ändern sich, wenn die Strömung turbulent wird. Bei gleicher Geschwindigkeit und gleicher geometrischer Form kann die Strömung bei Oberflächen, deren Texturen unterschiedliche Reynoldschen Zahlen zeigen, laminar oder turbulent sein. Deshalb ändern sich die Druckkräfte, wenn z. B die Tragfläche eines Flugzeugs Eis ansetzt: Die Strömung an der Oberfläche wird turbulent, weil durch die kleine Eiskristallen die Reynoldsche Zahl sehr viel kleiner wird (vgl. http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/V3_5A_Limulus.DOC).

3.5.2.5 Der Widerstandsbeiwert

Auf einen umströmten Körper wirkt eine Druckkraft F_W in Richtung der Strömung. Diese Kraft ist proportional zur Querschnittsfläche A_S senkrecht zur Strömungsrichtung, dem Staudruck und zum Widerstandsbeiwert c_W, der im Bereich laminarer Strömung von der Form abhängt. Den kleinsten Widerstand zeigt die „Tropfenform“.

$F_W = c_W \cdot A_S \cdot (p_0 - p_v)$	Druckwiderstand F_W und Widerstandsbeiwert c_W
A_S	Schattenfläche in Anströmrichtung
$p_0 - p_v$	Staudruck

Tabelle 10 Definition des Widerstandsbeiwerts c_W

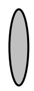
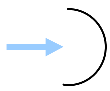
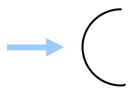
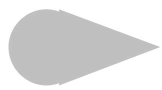
Form	Kreis-scheibe	Offene Halbkugel		Kugel		Stromlinien-körper	Autos, Mittelwert	
				Reynolds-Zahl Re			Baujahr	
				$< 3 \cdot 10^5$	$> 3 \cdot 10^5$		70	99
c_W	1,1	1,33	0,34	0,47	0,09-0,18	0,06	0,45	0,3

Tabelle 11 Widerstandsbeiwerte für einige Körper. Bei gleicher angeströmter Fläche ist die Kraft auf einen Körper proportional zum Widerstandsbeiwert c_W.

Versuch 14 Im Windkanal wird der Widerstand unterschiedlicher Objekte gemessen.