*Vorlesung Experimentalphysik I am 6.12.1999 und 7.12.1999 J. Ihringer*

# 3.3 Hydro- und Aerostatik

Die statischen Eigenschaften von und Gasen und Flüssigkeiten betreffen die Kompression und die Druck- und Auftriebskräfte. Im Gegensatz zur Statik der festen Körpern setzen Flüssigkeiten und Gase Scherungen keine rückstellenden Kräfte entgegen.

## 3.3.1 Der Druck

Durch Kräfte können auch Flüssigkeiten und Gase mechanisch verändert werden. Wirkt die Kraft aber punktförmig, wie etwa am Hebel, dann geht sie buchstäblich ins Leere, weil das Medium wegen seiner Forminstabilität ausweicht. Deshalb muß das Medium in irgendeiner Form mit definiertem Volumen gefaßt sein. Die Kraft wirkt, analog der Kraft bei der Dehnung fester Körper, senkrecht auf eine Fläche der Form. Mit dieser Vereinbarung wird die Kraft im folgenden nur als Betrag angegeben. Der Quotient aus Kraft und dazu senkrecht stehender Fläche heißt Druck, er entspricht der Spannung bei der Dehnung. Wird der Druck verändert, dann verschieben sich zur Einstellung des statischen Gleichgewichts die Teilchen des Gases oder der Flüssigkeit solange, bis überall der gleiche Druck herrscht.

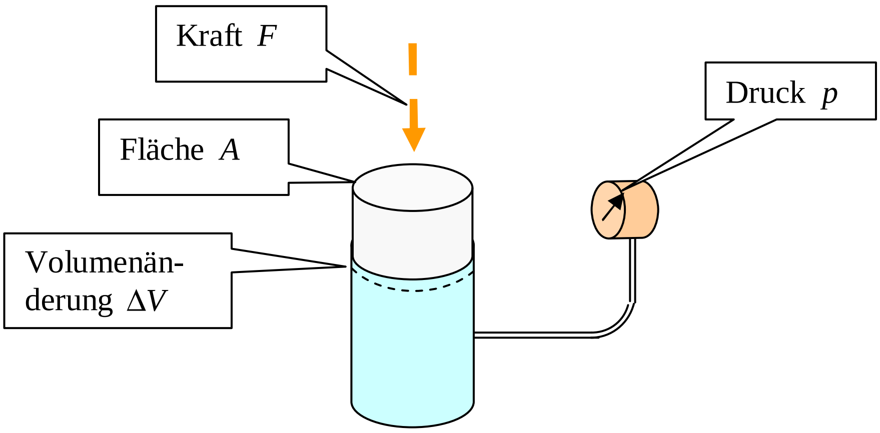



*Abbildung 1 Messung des Drucks und der Kompressibilität einer Flüssigkeit*

| Formel | Einheit | Anmerkung |
|---|---|---|
| $p = \frac{F}{A}$ | $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$ (Pascal) | Definition des Druckes als Quotient aus Kraft und Fläche und SI Einheit dazu |
| | $1\,\mathrm{bar} = 10^5\ \mathrm{Pa}$ | Weitere gesetzliche Druckeinheit |
| | $1\,\mathrm{at} \approx 10^5\ \mathrm{Pa}$ | Alte Einheit: 1 Atmosphäre |

*Tabelle 1 Definition des Drucks*

### 3.3.2 Kompression von Flüssigkeiten

Wird auf eine Flüssigkeit mit einem Stempel ein Druck ausgeübt, dann verringert sie ihr Volumen von $V$ auf $V - dV$. Der Kompressionsmodul $K$ ist ein Maß für den Widerstand gegen die Volumenänderung.

| Formel | Einheit | Anmerkung | |
|---|---|---|---|
| $\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K}$ | | Die relative Volumenänderung $-\Delta V / V$ ist zum Druck $p$ proportional | |
| $K$ | Pa | Kompressionsmodul | |
| | | Stoff | $K$ [Pa] |
| | | Wasser | $2 \cdot 10^9$ |
| | | Benzol | $1 \cdot 10^9$ |
| | | Kupfer | $1{,}4 \cdot 10^{11}$ |

*Tabelle 2 Definition des Drucks und des Kompressionsmoduls*

*Versuch 1 Schuß in eine Kiste. a) Leere Kiste b) Mit Wasser gefüllte Kiste.*

Beim Schuß in die mit Wasser gefüllte Kiste $(V = 1000\ \text{cm}^3)$ erhöht das Volumen der Kugel $(0{,}1\ \text{cm}^3)$ den Druck auf $p$:

| | |
|---|---|
| $p = -K \cdot \frac{\Delta V}{V} = 2 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-7}}{10^{-3}}\ \text{Pa} = 2\ \text{bar}$ | Druck nach Erhöhung des Volumens $V$ um $\Delta V$ |

### 3.3.3 Stempeldruck, hydraulische Presse

Läßt man in einen Zylinder mit beweglichem Stempel eine Flüssigkeit mit vorgegebenem Druck einströmen, dann kann man bei Wahl einer genügend großen Stempel Fläche hohe Kräfte erzielen. Bei Verschiebung des Stempels um das Volumen $\Delta V$ bei Druck $p$ wird Arbeit geleistet:

| Formel | Anmerkung |
|---|---|
| $dW = -p \cdot dV$ | Druckarbeit bei Verschiebung des Kolbens um $\Delta V$ |
| $dW = -\frac{F}{A} \cdot ds \cdot A = -F \cdot ds$ | Überführung der Druckarbeit in die Form „Kraft mal Weg“: Der Stempel mit Fläche A verschiebt sich unter der Kraft $F$ um den Weg $ds$ |

*Tabelle 3 Druckarbeit*

*Versuch 2 In einer Anlage wie in Abb. 2 wird mit Hilfe des Wasserdrucks aus der Leitung ein Holzstück gesprengt.*

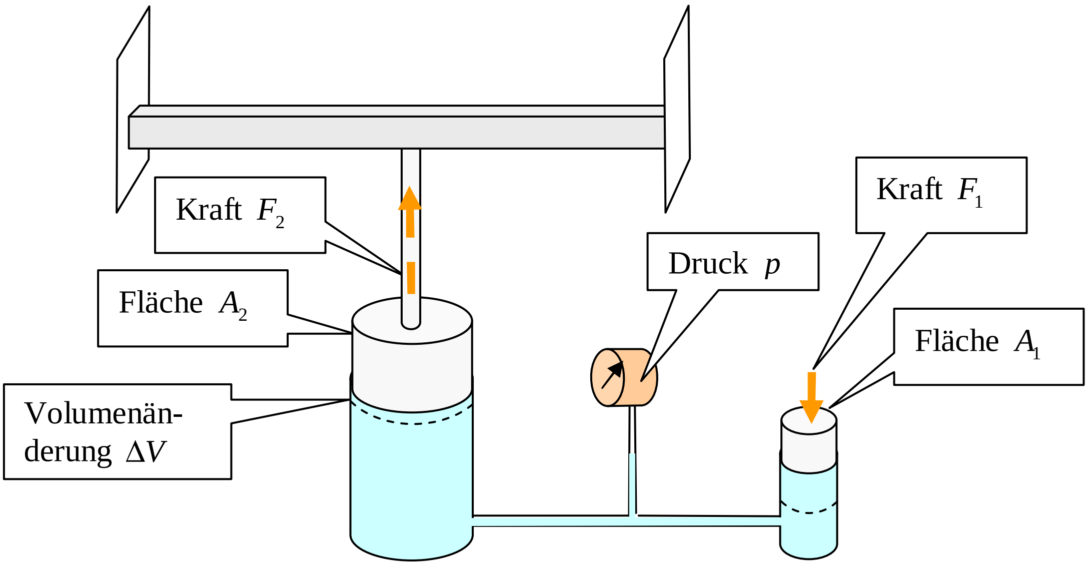



*Abbildung 2 Hydraulische Presse, auf ein eingespanntes Holz wirkend.*

In der hydraulischen Presse wird mit einer kleinen Kraft $F_1$ an einer kleinen Fläche $A_1$ eine große Kraft $F_2$ an der großen Fläche $A_2$ erzeugt. Überall in der Presse herrscht der gleiche Druck, deshalb gilt:

| Formel | Anmerkung |
|---|---|
| $p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$ | Gleicher Druck in beiden Stempeln |
| $F_2 = \frac{A_2}{A_1} \cdot F_1$ | Verhältnis der Kraftverstärkung: $\frac{A_2}{A_1}$ |

*Tabelle 4*

Wird die Last links um den Weg $ds_2$ gehoben, dann muß der Stempel rechts um $ds_1$ gesenkt werden. Die Wege stellen sich so ein, daß auf beiden Seiten die gleiche Arbeit $dW = p \cdot dV$ verrichtet wird:

| Formel | Anmerkung |
|---|---|
| $dV = ds_1 \cdot A_1 = ds_2 \cdot A_2$ | Gleiche Volumenänderung in beiden Stempeln |
| $ds_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot ds_1$ | Verhältnis der Wegverkürzung: $\frac{A_1}{A_2}$ |
| $dW = F_1 \cdot ds_1 = F_2 \cdot ds_2$ | Auf beiden Seiten wird die gleiche Arbeit $dW = p \cdot dV$ verrichtet |
| $dW = F_1 \cdot ds_1 = p \cdot A_1 \cdot ds_1 = p \cdot dV$ | |

*Tabelle 5 Arbeit bei der hydraulischen Presse. Bezeichnungen nach der Abbildung.*

### 3.3.4 Schweredruck

Durch die Anziehungskraft der Erde übt eine Flüssigkeit auf eine Fläche *A* in tieferen Schichten (Tiefe *h*) einen Druck aus, der nur von der Höhe der Flüssigkeit darüber abhängt:

| Formel | Anmerkung |
|---|---|
| $F = m \cdot g = V \cdot \rho \cdot g = A \cdot h \cdot \rho \cdot g$ | Kraft auf eine Fläche in Tiefe $h$ in einer Flüssigkeit mit Dichte $\rho$ |
| $p = \frac{F}{A} = h \cdot \rho \cdot g$ | Druck in Tiefe $h$: Er ist von der Gestalt des Gefäßes unabhängig. |

*Tabelle 6 Schweredruck oder hydrostatischer Druck, g ist die Fallbeschleunigung.*

*Versuch 3 Der Wasserdruck in der Tiefe hält eine außen am Boden eines Rohres aufliegende Verschlußplatte auf dem Rohr. Füllt man Wasser in das Rohr bis zur Höhe des Wassers außen, dann fällt die Platte ab: Das Gewicht der Wassersäule ist gleich der Druckkraft in der Tiefe.*

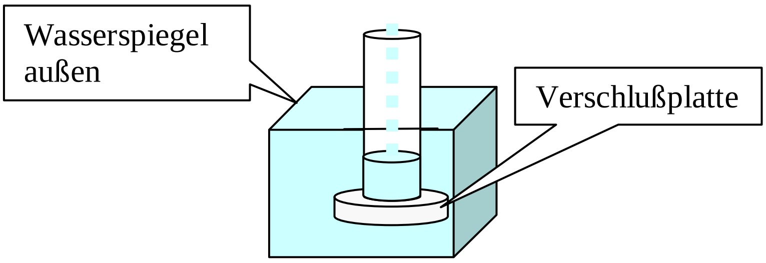



*Abbildung 3 Zum Versuch 3: Die Druckkraft in der Tiefe entspricht dem Gewicht der Wassersäule*

*Versuch 4 Druck über einer Wassersäule. Ein Manometer wird mit einem Stempel auf einem Luftpolster auf einen Druck von 1000 Pa geeicht. Mit dem Manometer wird dann in Wasser die lineare Zunahme des Druckes mit der Tiefe gezeigt.*

#### 3.3.4.1 Kommunizierende Röhren

Miteinander verbundene Gefäße nennt man „kommunizierende Röhren“. Abgesehen von Effekten der Kapillarwirkung stellt sich in allen die gleiche Höhe des Flüssigkeitsspiegels ein, weil nur dann in Höhe ihrer Verbindung der Druck gleich ist.

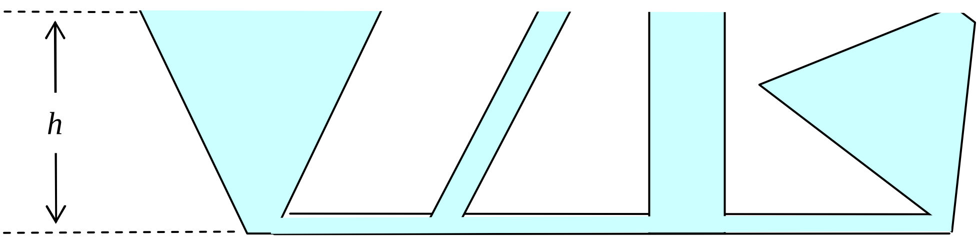



*Abbildung 4 In jeder dieser „kommunizierende Röhren“ hängt der Druck nur von der Höhe der Wassersäule ab, unabhängig von Form und Durchmesser.*

*Versuch 5 Kommunizierende Röhren. Die Flüssigkeit steht in allen Gefäßen gleich hoch.*

### 3.3.4.2 Auftrieb

Taucht ein Körper in eine im Schwerefeld der Erde befindliche Flüssigkeit, dann wirken auf ihn an allen Seiten die der Tiefe entsprechenden Druckkräfte. Die Kräfte aus den Drucken auf die Seitenflächen heben sich gegeneinander auf, es bleibt aber eine Differenz zwischen den Kräften an der Grund- und an der Deckfläche. Die resultierende Kraft wird als Auftrieb bezeichnet. Dabei gilt das Archimedische Prinzip: „Der Auftrieb eines Körpers ist gleich dem Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit.“ (Archimedes, 220 v. Chr.).

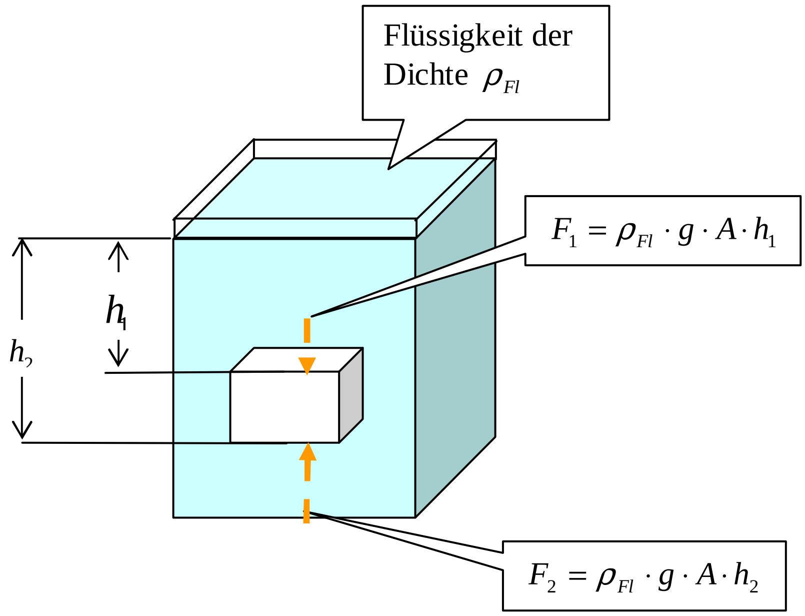



*Abbildung 5 Auftrieb eines Körpers, Boden und Decke habe jeweils die Fläche A*

| Formel | Anmerkung |
|---|---|
| $F_1 = \rho_{Fl} \cdot g \cdot h_1 \cdot A$ | Druckkraft auf die Decke in Tiefe $h_1$ |
| $F_2 = \rho_{Fl} \cdot g \cdot h_2 \cdot A$ | Druckkraft auf den Boden in Tiefe $h_2$ |
| $F_A = F_2 - F_1 = \rho_{Fl} \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \cdot A = \rho_{Fl} \cdot V_K \cdot g$ | Auftriebskraft=Gewicht der Flüssigkeit, die dem *Volumen* $V_K$ *des eingetauchten Körpers* entspricht |

*Tabelle 7 Kräfte durch den Druck der Flüssigkeit auf einen Körper und Auftriebskraft*

*Versuch 6 Ein Stempel wird nur auf seiner Oberseite von der Flüssigkeit belastet: Er erfährt keinen Auftrieb. (Beispiel: Holzstöpsel in Brunnentrögen, „perpetuum mobile“ mit Korkschnur)*

*Versuch 7 Das Archimedische Prinzip wird unmittelbar nachgewiesen: Auf einer Waage im Gleichgewicht wird ein Gegenstand, der auf der Waagschale links befestigt ist, in das Wasser auf der Waagschale rechts getaucht. Links wird zunächst um den Auftrieb leichter, weil der Wasserspiegel ansteigt. Man läßt das Wasser aber bis zum Pegel vor dem Eintauchen abfließen und sammelt es auf der linken Schale: Die Waage kommt ins Gleichgewicht. Das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist gleich der Auftriebskraft.*

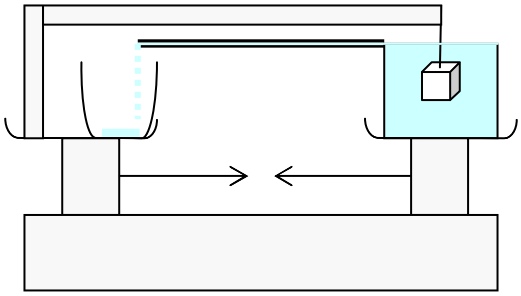


*Abbildung 6 Die Waage zeigt das Archimedische Prinzip: Das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit gleicht der Auftriebskraft*

Ob ein Körper schwimmt, schwebt oder sinkt hängt vom Verhältnis der Dichten von Körper und Flüssigkeit ab:

| Formel | Anmerkung |
|---|---|
| $m_K = \rho_K \cdot V_K$ | Masse des Körpers mit Volumen $V_K$, Dichte $\rho_K$ |
| $m_{verdrängt} = \rho_{Fl} \cdot V_{verdrängt}$ | Masse der verdrängten Flüssigkeit, Dichte $\rho_{Fl}$ |
| Schwimmen: | |
| $\rho_K < \rho_{Fl}$ | Wenn die Dichte des Körpers kleiner ist als die der verdrängten Flüssigkeit, dann schwimmt der Körper. Er sinkt soweit ein, bis die Masse der verdrängten Flüssigkeit seiner Masse entspricht. |
| $m_K = \rho_K \cdot V_K = \rho_{Fl} \cdot V_{verdrängt} = m_{Verdrängt}$ | |
| $V_{verdrängt} = \frac{\rho_K}{\rho_{Fl}} \cdot V_K$ | |
| Schweben, sinken: | |
| $\rho_K \geq \rho_{Fl}$ | Der Körper schwebt $(=)$ oder sinkt $(>)$, in beiden Fällen gilt $V_{verdrängt} = V_K$ |

*Tabelle 8 Schwimmen, schweben, sinken als Funktion des Verhältnisses der Dichten von Körper und Flüssigkeit*

*Versuch 8 Schwimmen und Sinken wird am Kugelmodell gezeigt: In einem Flüssigkeitsmodell aus Plastikkugeln steigt, wenn man gut schüttelt, eine Holzkugel auf, eine Stahlkugel sinkt ab.*

Taucht man einen Körper mit bekanntem Gewicht in eine Flüssigkeit bekannter Dichte, dann kann man aus seiner Gewichtsabnahme seine Dichte bestimmen:

| Formel | Anmerkung |
|---|---|
| | Gewichtsabnahme=Auftriebskraft: Gewicht der Verdrängten Flüssigkeit |
| $F_K = g \cdot \rho_K \cdot V_K$ | Gewicht des Körpers an Luft |
| $\rho_K = \frac{F_K}{F_A} \cdot \rho_{Fl}$ | Dichte des Körpers: Folgt aus dem Quotienten aus Auftriebskraft (gemessen als Gewichtsabnahme in der Flüssigkeit) und Gewicht, multipliziert mit $\cdot \rho_{Fl}$. |

*Tabelle 9 Bestimmung der Dichte eines untergetauchten Körpers durch Wägung außerhalb und innerhalb einer Flüssigkeit von bekannter Dichte.*

Schwimmt der Körper, dann kann man bei Kenntnis seines Gewichts die Dichte der Flüssigkeit bestimmen:

| Formel | Anmerkung |
|---|---|
| $\rho_{Fl} = \frac{V_K}{V_{verdrängt}} \cdot \rho_K = \frac{m_K}{V_{verdrängt}}$ | Dichte der Flüssigkeit, folgt aus $F_A = F_K$ |

*Tabelle 10 Bestimmung der Dichte einer Flüssigkeit mit einem Schwimmer bekannter Dichte und bekannten Volumens (z. B. eines Aräometers)*

*Versuch 9 Mit einem Aräometer wird die Dichte eines Alkohols bestimmt: Er taucht im Alkohol weniger tief ein. Auf einer Skala am Aräometer liest man in Höhe der Wasserlinie die Dichte ab*

## 3.3.5 Der Druck bei Gasen

### 3.3.5.1 Das Boyle-Mariottesche Gesetz

Ist ein Gas in einem Volumen eingeschlossen, dann wirkt auch ohne Schwerkraft auf die Begrenzungsfläche ein Druck. Die Teilchen eines Gases fliegen mit unterschiedlichen, durch die Temperatur vorgegebenen Geschwindigkeiten in alle Richtungen auseinander, bis sie an den Gefäßwänden reflektiert werden. Die dabei durch den Impulsübertrag auf die Wand ausgeübte Kraft erzeugt den Druck. Im idealen Gas sind Druck und Volumen umgekehrt proportional zueinander. Das ist die Aussage des Boyle-Mariotteschen Gesetztes:

| Formelzeichen | Einheit | Anmerkung |
|---|---|---|
| $V \cdot p = c$ | Liter $\cdot$ Bar | Boyle-Mariottesches Gesetz |
| $V$ | Liter | Volumen |
| $p$ | Bar | Druck |
| $c = 22{,}4 \cdot \frac{m}{M}$ | Liter $\cdot$ Bar | Bei Temperatur von 273 K (0° Celsius) |
| $m$ | kg | Masse des Gases |
| $M$ | kg | Masse eines Mols, das ist die Masse von $6{,}02 \cdot 10^{23}$ Teilchen |

*Tabelle 11 Das Boyle-Mariottesche Gesetz*

*Versuch 10 Zum Boyle-Mariotteschen Gesetz: Mit einer Wassersäule in 0 und 5m Höhe wird ein Luftvolumen auf 2/3 reduziert:*

| Formel | Anmerkung |
|---|---|
| $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$ | Boyle-Mariottesches Gesetz |
| $V_2 = \frac{p_1}{p_2} \cdot V_1 = \frac{1}{1{,}5} \cdot V_1$ | Das Volumen unter Druck von 1,5 bar ist 2/3 dessen bei 1 bar |

*Tabelle 12 Anwendung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes im Versuch*

### 3.3.5.2 Die barometrische Höhenformel

Der Luftdruck in unserer Umgebung entsteht durch das Gewicht der Gashülle der Erdatmosphäre. Den Verlauf des Luftdrucks in Abhängigkeit von der Höhe über der Erdoberfläche beschreibt die barometrische Höhenformel.

In Flüssigkeiten oder feste Körpern mit konstanter Dichte nimmt der Druck mit der Höhe *linear* zu. In Gasen hängt das Volumen einer bestimmten Teilchenzahl nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetz vom Druck ab. Der Quotient aus der Masse der Teilchen und ihrem Volumen ist aber die Dichte: Infolge der hohen Kompressibilität ist die Dichte in Gasen druckabhängig. Das ist der entscheidende Unterschied zu den anderen Aggregatzuständen und die Grundlage der barometrischen Höhenformel:

| $p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h}$ | Die Barometrische Höhenformel |
|---|---|
| $\rho_0 = 1{,}29 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ | Dichte der Luft auf Meereshöhe |
| $p_0 = 101325 \ \mathrm{Pa}$ | Normaldruck |

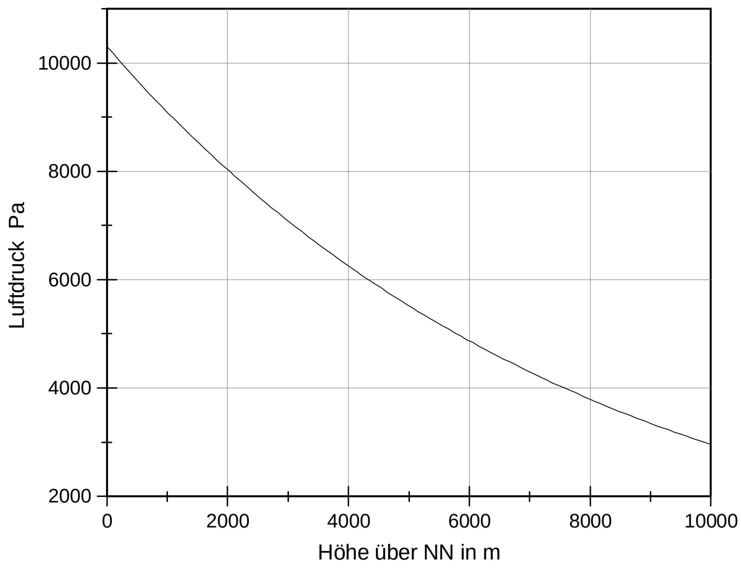



*Abbildung 7 Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe über dem Meeresspiegel nach der barometrischen Höhenformel*

| Formel | Anmerkung |
|---|---|
| $p \cdot V = p_0 \cdot V_0$ | Boyle-Mariottesches Gesetz für Druck und Volumen |
| $\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$ | Nach Division durch die Masse: Druckabhängigkeit der Dichte |
| $\rho(p) = \frac{p}{p_0} \cdot \rho_0$ | |
| $\Delta p = -\rho(p) \cdot g \cdot \Delta h$ | Druckzunahme durch das Gewicht einer Luftsäule der Höhe $dh$ und Querschnitt 1, die vom Druck abhängige Dichte $\rho(p)$ eingesetzt |
| $dp = -\frac{p}{p_0} \cdot \rho_0 \cdot g \cdot dh$ | |
| $\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dh$ | Differentialgleichung für $dp, dh$ |
| $p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h}$ | Ergebnis der Integration: Die Barometrische Höhenformel |

*Tabelle 13 Herleitung der barometrischen Höhenformel*

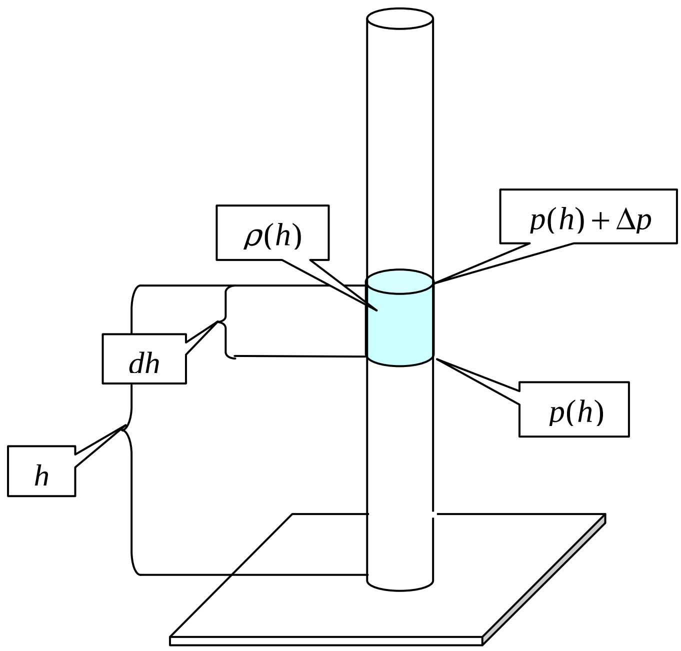



*Abbildung 8 Zur Herleitung der barometrischen Höhenformel. Die Säule des Gases habe den Querschnitt 1.*

*Versuch 11 Messung der Abnahme des Luftdrucks in 5m Höhe im Hörsaal. Ein Glasgefäß mit Manometer wird in 5 m Höhe belüftet, dort wird das Gefäß - mit ausgeglichenem Manometer, einem Wasser gefüllten U-Rohr - geschlossen. Wieder am Grund zeigt das Manometer einen Unterdruck im Gefäß von 6,5 mm Wassersäule.*

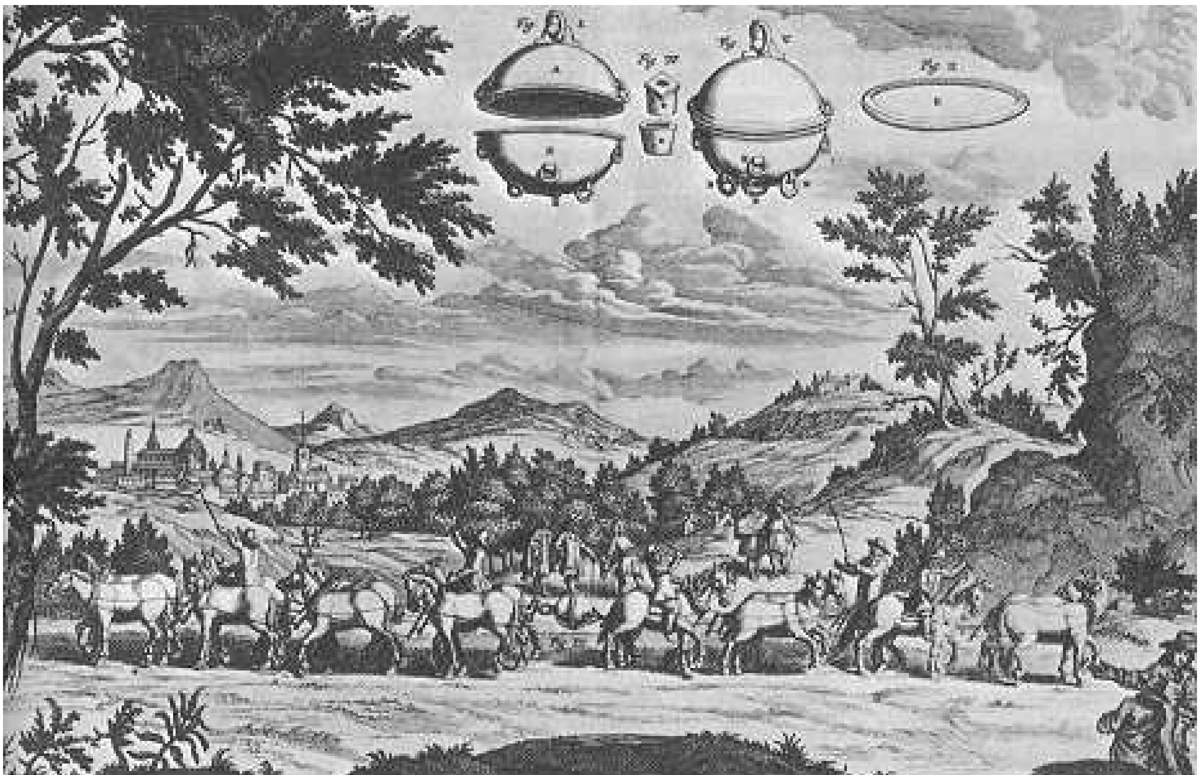
| | |
|---|---|
| $\Delta p = -\rho(p) \cdot g \cdot \Delta h$ | Druckänderung durch das Gewicht einer Luftsäule der Höhe $\Delta h$ =5 m und Querschnitt 1, mit Luft der Dichte $\rho(p) = 1{,}29\ \mathrm{kg/m^3}$ |
| $\Delta p = -1{,}29 \cdot 9{,}81 \cdot 5 = 63\ \mathrm{Pa}$ | |
| $\Delta p = -\rho_{Wasser} \cdot g \cdot \Delta h_{Wasser}$ | Der Druckunterschied entspricht der Höhe einer Wassersäule |
| $\Delta h_{Wasser} = \dfrac{\rho(p)}{\rho_{Wasser}} \cdot \Delta h$ | Eine 6,5 mm hohe Wassersäule kompensiert den Unterschied im Luftdruck in 5 m Höhe |
| $\Delta h_{Wasser} = \dfrac{1{,}29}{1000} \cdot 5 = 0{,}0065\ \mathrm{m}$ | |

*Tabelle 14 Berechnung der Höhe einer Wassersäule, die der Abnahme des Luftdrucks in 5m Höhe entspricht.*

*Versuch 12 Messung des Gewichts von 575* $\mathrm{cm^3}$ *Luft mit Herrn Gugels Waage „Meisterstück“: Die Luft sollte in Meereshöhe 741,75 mg (* $m = \rho \cdot V$ *) wiegen, abzüglich 6,3 % ( vgl. Tab. 13) zur Berücksichtigung von 500m Höhe: 692 mg. Zur genauen Angabe muß die Dichte noch auf den aktuellen, vom Wetter abhängigen Luftdruck korrigiert werden.*

*Versuch 13 Der Bereich des Toricellischen Vakuums ist am Hg-Manometer sichtbar*

*Versuch 14 Die Magdeburger Halbkugeln werden vom Luftdruck zusammengehalten, an ihnen hängen 50 kg.*



a von Guerickes Schauversuch mit den Magdeburger Halbkugeln im Jahre 1663 (Kupferstich in den „Experimenta nova, ut vocantur, Magdeburgica de vacuo spatio", 1672)

#### 3.3.5.3 Der Auftrieb an Luft

Jeder in der Atmosphäre befindliche Körper erfährt einen Auftrieb, der dem Gewicht der vom Körper verdrängten Luft entspricht. Man muß aber auch hier beachten, daß die Dichte der Luft vom Druck abhängt: Mit zunehmender Höhe nimmt der Auftrieb ab- im Gegensatz zum Auftrieb in Flüssigkeiten, der in allen Tiefen (nahezu) konstant ist.

*Versuch 15 Demonstration des Auftriebs in Luft. Die Umgebung einer Kugel auf einer Waage wird evakuiert, die Waage zeigt, daß die Kugel schwerer wird.*

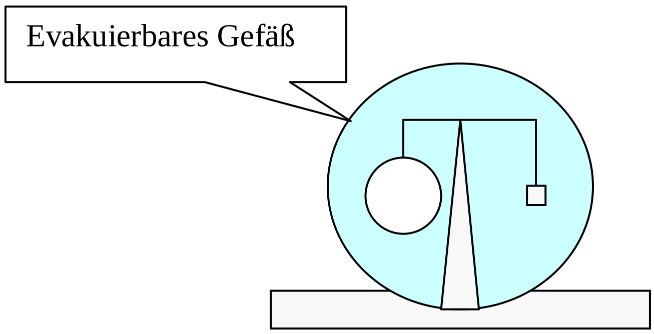



*Abbildung 9 An einem evakuierbaren Gefäß mit Waage wird der Auftrieb an einer Kugel in Luft gezeigt. Der Auftrieb des Ausgleichsgewichts rechts ist vernachlässigbar klein: Das Volumen des Gewichts ist klein, weil seine Dichte hoch ist.*

## 3.4 Oberflächenerscheinungen

Die Teilchen an der Oberfläche einer Flüssigkeit können sich ohne Energieaufwand verschieben, bis jedes im Gleichgewicht der Kräfte ist. Die Kräfte zum Nachbarn sind, abhängig von seiner Art und seinem Abstand, anziehend oder abstoßend. Im Schwerefeld wirkt zusätzlich die Schwerkraft. Jede Verschiebung der Teilchen aus ihrer Gleichgewichtslage erfordert Energie, deshalb zeigt die Oberfläche die Gestalt geringster Energie. An der Berührungsstelle unterschiedlicher Materialien bilden sich spezielle Formen, weil auf ein an der Grenze liegendes Teilchen unterschiedliche Kräfte wirken.

### 3.4.1 Oberflächenspannung, Oberflächenenergie

Größenordnung und Richtung der Kräfte können am Modell der Kugelpackung veranschaulicht werden. Im Innern der Flüssigkeit ist jedes Teilchen von 12 Nachbarn umgeben. Bei Teilchen an der Oberfläche fallen 3 dieser Nachbarn weg. Wird die Oberfläche vergrößert, dann werden mehr Teilchen an die Oberfläche gebracht, jedes von ihnen muß sich von der Bindung an 3 Nachbarn lösen. Zur Vergrößerung der Oberfläche muß deshalb die Energie zur Lösung der 3 Bindungen aufgebracht werden. Auf atomarer Ebene ist demnach die Oberflächenvergrößerung mit dem Sieden verwandt, wo die Energie zur Lösung aller 12 Bindungen aufgebracht werden muß.

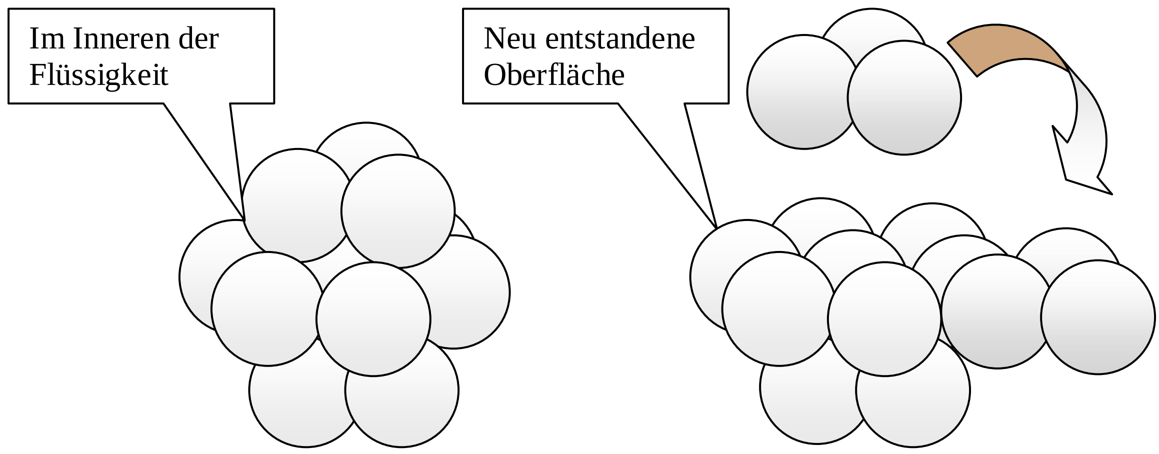



*Abbildung 10 Verschiebung der Teilchen bei der Vergrößerung der Oberfläche: Kugelpackungen aus dem Inneren der Flüssigkeit werden unter Energieaufwand aufgebrochen. Das Teilchen in der Mitte der Packung muß sich von 3 Bindungen lösen.*

Oberflächen sind also immer Minimalflächen. Wirken keine äußeren Kräfte, dann hat die Kugel die kleinste Oberfläche für ein gegebenes Volumen.

*Versuch 16 Minimalflächen werden aus Lamellen hergestellt.*

*Versuch 17 Unterschiedliche Materialien werden auf einer Wasseroberfläche beobachtet: Kampfer, eine Nadel, Quecksilber*

*Versuch 18 Öl- und Quecksilbertröpfchen in Wasser. Der Auftrieb kompensiert die Schwerkraft, es gibt keine äußeren Kräfte: Es bilden sich Kugeln. Bei gegebenem Volumen ist die Oberfläche einer großen Kugel günstiger als die vieler kleiner: Deshalb verschmelzen sich treffende Quecksilbertröpfchen (sehr hohe Oberflächenspannung) zu einem größeren.*

*Versuch 19 Mit einem Spülmittel wird auf einer Seite eines schwimmenden Gegenstands die Oberflächenspannung abgesenkt: Die Oberfläche auf der anderen Seite bildet sich zurück und zieht dabei den Gegenstand mit.*

Mit einem beweglichen Bügel kann man die Energie zur Vergrößerung der Oberfläche makroskopisch messen.

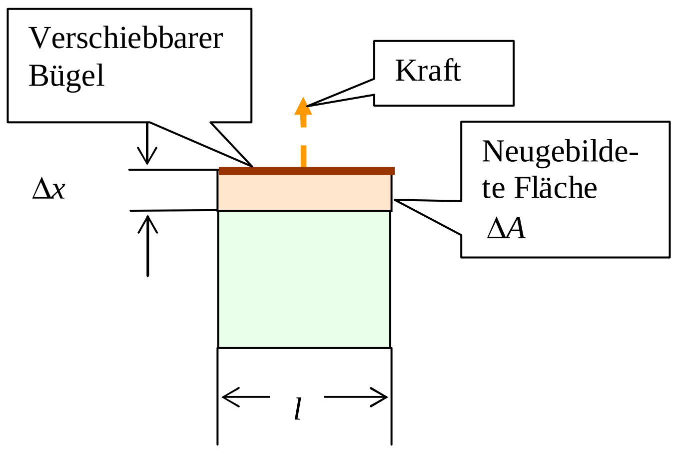



*Abbildung 11 Vergrößerung der Oberfläche einer Lamelle aus einer Lösung durch einen verschiebbaren Bügel*

Die Oberflächenspannung $\sigma_O$ ist als die Arbeit definiert, mit der die Oberfläche um 1 $cm^2$ vergrößert werden kann:

| Formel | Einheit | Anmerkung |
|---|---|---|
| $\Delta W = \sigma_O \cdot \Delta A$ | J | Arbeit zur Vergrößerung der Oberfläche um die Fläche $\Delta A$ |
| $\Delta A$ | $\mathrm{m}^2$ | Flächenzunahme |
| $\sigma_O$ | $1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2} = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ | Oberflächenspannung, spezifische Oberflächenenergie |

| Material | $\sigma_O \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$ |
|---|---|
| Hg | 0,471 |
| Wasser | 0,073 |
| Benzol | 0,029 |
| Ethylether | 0,017 |

*Tabelle 15 Definition der Oberflächenspannung und Zahlenwerte für einige Flüssigkeiten*

Die Kraft auf den Bügel folgt aus der Arbeit. Bei der Lamelle wird die Oberfläche auf beiden Seiten vergrößert, deshalb wird die doppelte geometrische Vergrößerung für $\Delta A$ eingesetzt:

| Formel | Anmerkung |
|---|---|
| $\Delta W = \sigma_O \cdot \Delta A = \Delta x \cdot F$ | Arbeit zur Oberflächenvergrößerung als Kraft auf den Bügel mal Weg |
| $\Delta A = 2 \cdot \Delta x \cdot l$ | Vergrößerung der Oberfläche |
| $\sigma_O \cdot 2 \cdot \Delta x \cdot l = \Delta x \cdot F$ | $\Delta A$ durch $2 \cdot l \cdot \Delta x$ ersetzt |
| $F = 2 \cdot l \cdot \sigma_O$ | Kraft auf den Bügel |

*Tabelle 16 Kraft auf den Bügel bei Vergrößerung der Oberfläche nach der Abbildung oben und im nachfolgenden Versuch*

*Versuch 20  In einem Versuchsaufbau nach der Abbildung oben wird mit einem Bügel eine Lamelle einer Seifenlösung vergrößert. Man erkennt, daß die Kraft auf den Bügel von der Größe der Fläche unabhängig ist.*

*Versuch 21  Mit der Waage „Meisterstück“  wir die Kraft auf den Bügel quantitativ bestimmt. Man findet* $\sigma_O^{Wasser} = \frac{F}{2l} = 0{,}071\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

#### 3.4.1.1 Der Kohäsionsdruck: Überdruck in der Seifenblase

In kugelförmigen Volumina ist der durch die Oberflächenspannung ausgeübte Druck immer zum Mittelpunkt gerichtet. Man nennt diesen Druck den Kohäsionsdruck. Um ihn zu berechnen bestimmt man zunächst die mechanische Druckarbeit $p \cdot dV$ zur Vergrößerung des Radius um ein kleines Stück $dr$. Diese Arbeit dient ausschließlich zur Vergrößerung der Oberfläche um ein Stück $dA$. Daraus ergibt sich eine Beziehung zwischen Radius, Druck und Oberflächenspannung.

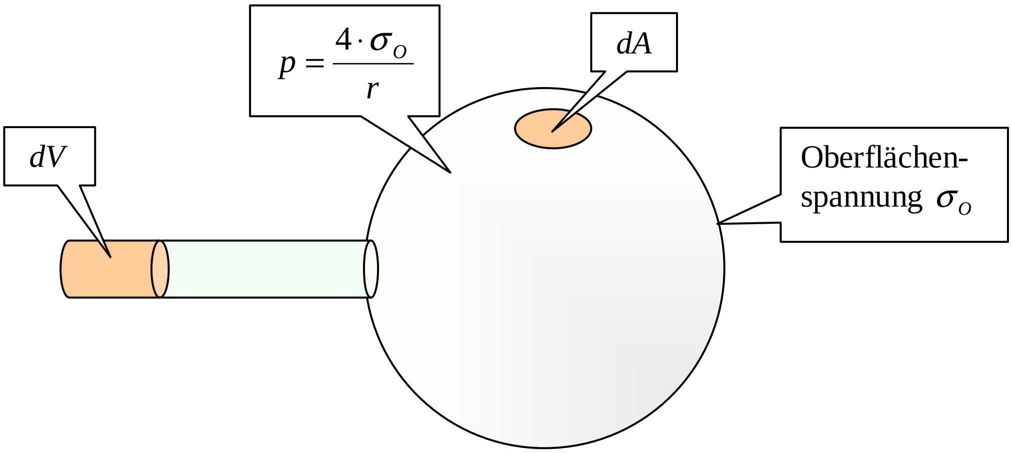



*Abbildung 12 Überdruck in der Seifenblase. Die Oberflächenvergrößerung dA bei Volumenzuwachs dV ist symbolisch als kleine Fläche eingesetzt. Sie verteilt sich auf die ganze Oberfläche.*

| Formel | Anmerkung |
|---|---|
| $dW = p \cdot dV = 4 \cdot p \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr$ | Arbeit zu Vergrößerung des Volumens um $dV$, $dV$ ist durch $dr$ gegeben: |
| $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$<br>$dV = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr$ | Herleitung von $dV$ als Funktion von $dr$ aus der Ableitung $\frac{dV}{dr}$ des Volumens $V$ nach $r$ |
| $dW = \sigma_0 \cdot dA = 16 \cdot \sigma_0 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$ | Arbeit zur Vergrößerung der Oberflächen innen und außen um $dA$, $dA$ ist durch $dr$ gegeben: |
| $A = (4 \cdot \pi \cdot r^2) \cdot 2$<br>$dA = (8 \cdot \pi \cdot r \cdot dr) \cdot 2$ | Herleitung von $dA$ als Funktion von $dr$ aus der Ableitung $\frac{dA}{dr}$ der Oberfläche $A$ nach $r$. |
| $dW = p \cdot dV = \sigma_0 \cdot dA$ | Beide Arbeiten gleichgesetzt |
| $4 \cdot p \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr = 16 \cdot \sigma_O \cdot \pi \cdot r \cdot dr$ | Daraus folgt: |
| $p = \frac{4 \cdot \sigma_O}{r}$ | Kohäsionsdruck für zwei Oberflächen als Funktion des Radius. Die Hälfte des Werts gilt für eine Fläche, z. B. für die gewölbte Oberfläche einer Flüssigkeit in einer dünnen Kapillare. |

*Tabelle 17 Herleitung des Kohäsionsdrucks. Das ist z. B. der Überdruck in der Seifenblase.*

Der Druck ist dem Radius umgekehrt proportional, in kleinen Kugeln ist der Druck größer als in großen. Wenn sich zwei Kugeln treffen, dann bläst die kleinere die große auf und verschwindet in dieser. Die Hälfte des Werts für den Kohäsionsdruck in der Seifenblase beschreibt den Druck für eine Fläche, z. B. für die gewölbte Oberfläche in einer dünnen Kapillare.

### 3.4.2 Kapillarität, Kohäsion und Adhäsion

An der Wand des Gefäßes nimmt die Oberfläche spezielle Formen an. Auf die an der Wand anliegenden Teilchen der Flüssigkeit wirken Kräfte von den Teilchen der Wand, die sich im Allgemeinen von den Kräften zwischen den Teilchen der Flüssigkeit unterscheiden. Dazu kommt noch die Schwerkraft. Die qualitative Form der Oberfläche hängt dann davon ab, welche Wechselwirkung die größere ist. Zur Beschreibung gibt es einige spezielle Begriffe:

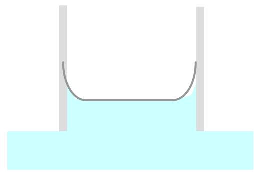
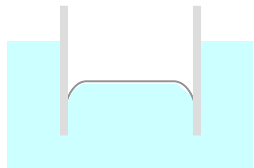
| Begriff | Erläuterung | |
|---|---|---|
| Adhäsion | Kräfte zwischen den Molekülen der Wand und denen der Flüssigkeit | |
| Kohäsion | Kräfte zwischen den Molekülen der Flüssigkeit | |
| Kapillarkompression | Die Flüssigkeit steigt an der Wand hoch, sie benetzt. Die Adhäsion ist größer als die Kohäsion. |  |
| Kapillardepression | Die Flüssigkeit wird von der Wand abgestoßen, sie benetzt nicht. Die Kohäsion ist größer als die Adhäsion. |  |

*Tabelle 18 Adhäsion und Kohäsion*

Die Flüssigkeitssäule in einer Kapillare steigt oder sinkt gegenüber der Höhe in kommunizierenden Röhren, bis ihr Schweredruck gleich dem Kohäsionsdruck ist. Daraus folgt die Steighöhe:

| Formel | Erläuterung |
|---|---|
| $p = \frac{2 \cdot \sigma_o}{r}$ | Kohäsionsdruck für eine kugelige Oberfläche von Radius $r$ und Oberflächenspannung $\sigma_O$ |
| $p = \rho \cdot g \cdot h$ | Schweredruck der Flüssigkeitssäule der Höhe $h$ mit Dichte $\rho$ |
| $h = \frac{2 \cdot \sigma_O}{r \cdot \rho \cdot g}$ | Steighöhe für benetzende, Tiefe der Absenkung für nicht benetzende Flüssigkeiten (z. B. Quecksilber im Glas) |

*Tabelle 19 Steighöhe bei Kapillaren. Der Querschnitt sollte so klein sein, daß die Oberfläche einer Halbkugel ähnlich sieht, sonst ist der Ansatz für den Kohäsionsdruck nicht gerechtfertigt.*

Beginnt man bei kleinen Kapillardurchmessern, dann zeigt die Oberfläche unter der Wirkung des Kohäsionsdrucks die Form einer Halbkugel. Die Höhe der Säule stellt sich so ein, daß die Oberfläche im Gleichgewicht von Schwere- und Kohäsionsdruck ist. Wird der Querschnitt vergrößert, dann wächst auch der Radius der Halbkugel, damit nimmt der Kohäsionsdruck ab. Die Säule steigt also weniger hoch. Bei weiterer Vergrößerung des Querschnitts wird der Kohäsionsdruck zu klein, um die Flüssigkeit bis zur Form einer Halbkugel an der Wand hochzuziehen, weil der Schweredruck der weit nach oben gezogenen Flüssigkeit viel zu hoch wäre: Man findet nur noch einen kleinen, höher oder tiefer liegenden Rand am Gefäß neben einer sonst ebenen Oberfläche.