Vorlesung Experimentalphysik I am 8.11.1999 und 10.11.1999 J. Ihringer

1.5.3 Reibungskräfte

Als Reibung bezeichnet man den Widerstand, der in der Berührungsfläche zweier Körper bei ihren relativen Bewegungen zueinander auftritt, oder zwischen Teilchen eines Stoffes, die sich relativ zueinander bewegen. Die zuerst genannte Reibung heißt „äußere Reibung“. Die zweite Form der Reibung heißt „innere Reibung“ und bestimmt die Viskosität, d. h. den Widerstand beim Fließen von Gasen, Flüssigkeiten aber auch von festen Körpern. Physikalisch wird die Reibung durch eine Maßzahl für die zur Bewegung erforderliche Kraft repräsentiert.

1.5.3.1 Reibung zwischen festen Flächen

Ursache für diesen Widerstand sind einerseits Kräfte zwischen den Molekülen beider Flächen, andererseits räumliche Hindernisse. Vorsprünge des einen hängen in Vertiefungen des anderen Materials. Besonders hoch ist immer die „Haftreibung“. Es muß viel Kraft aufgewendet werden, um die eingerasteten Materialien erstmals voneinander zu lösen. Sind beide Flächen einmal in Bewegung, dann wird die zum Ablösen an einer Stelle nötige Kraft an einer anderen Stelle, an der das Material einrastet, teilweise wieder gewonnen. Diese Effekte summieren sich zur Gleitreibung, die immer kleiner als die Haftreibung ist.

Leonardo da Vinci (15.4.1452-2.5.1519) erkannte bei Versuchen zur schiefen Ebene, daß die Reibung fester Körper nicht von der Größe der Auflagefläche oder der Geschwindigkeit eines Körpers, sondern von der *Normalkraft* senkrecht zur Auflagefläche abhängt.

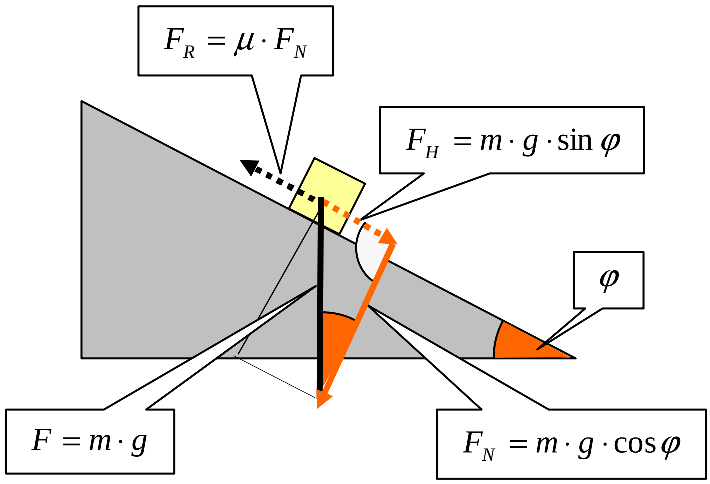


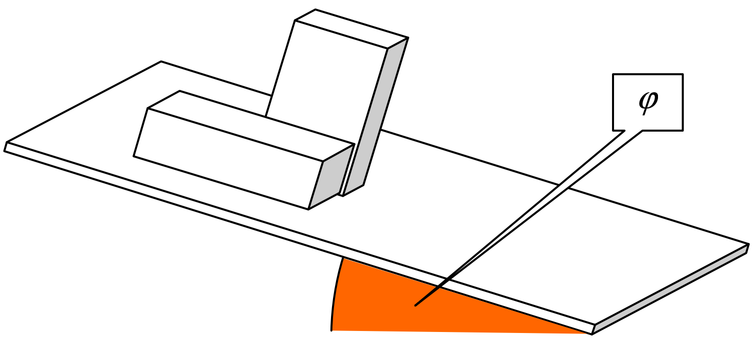
Abbildung 1 Schiefe Ebene mit Schwer-(schwarz), Normal-(rot), Hangabtriebs- (rot, strichliert) und Reibungskraft (schwarz, strichliert) eines Körpers, μ ist der Reibungskoeffizient. In der Darstellung ist die Reibungskraft gerade entgegengesetzt gleich der Hangabtriebskraft: Der Körper bewegt sich gleichförmig, d. h. er gleitet mit konstanter Geschwindigkeit hangabwärts.

Bei nur wenig geneigter Ebene wird der abgebildete Körper zunächst von der Reibungskraft festgehalten. Stellt man die Ebene immer steiler, so beginnt der Körper zu Gleiten, wenn die Hangabtriebskraft größer als die Haftreibungskraft wird. Der Winkel φ bei Beginn der Bewegung definiert den Reibungskoeffizienten μ für die Haftreibung: $\mu = \tan\varphi$.

Formel	Anmerkung
$\vec{F} = \vec{F}_N + \vec{F}_H$	Zerlegung der Schwerkraft
$\vec{F}_N \perp \vec{F}_H$	Beide Komponenten stehen senkrecht zueinander
$F_N = F \cdot \cos\varphi$	Betrag der Normalkraft, senkrecht zur Bahn
$F_H = F \cdot \sin\varphi$	Betrag der Hangabtriebskraft, tangential zur Bahn
φ	Neigungswinkel der Bahn, zur Erdoberfläche gemessen
$F_R = \mu \cdot F_N$	Reibungskraft, proportional zur Normalkraft, entgegen der Hangabtriebskraft
μ	Reibungskoeffizient
$F_H \geq F_R$	Bedingung für gleitende Bewegung: Die Hangabtriebskraft muss größer als die Reibungskraft sein.
$F \cdot \sin\varphi \geq \mu \cdot F_N$	
$F \cdot \sin\varphi \geq \mu \cdot F \cdot \cos\varphi$	
$\tan\varphi \geq \mu$	

Tabelle 1 Definition des Reibungskoeffizienten, Bedingung für gleitende Bewegung

Versuch 1 Zwei quaderförmige Holzklötze liegen mit unterschiedlichen Flächen auf einer schiefen Ebene. Beim langsamen Anheben setzen sich beide Körper beim gleichen Anstellwinkel in Bewegung, ihr Reibungskoeffizient $\mu = \tan\varphi$ *ist also unabhängig von der Auflagefläche.*



Versuch 2 Eine Filzunterlage zeigt bei unveränderten Massen die Abhängigkeit der Reibung von der Oberfläche.

Versuch 3 Die kleine Reibung bei rollender Bewegung wird gezeigt, indem sich ein zylinderförmiger Körper bei minimaler Neigung der Ebene in Bewegung setzt. Man sieht:

$\mu_R < \mu_G < \mu_H$	Die Rollreibung ist kleiner als die Gleitreibung, die Gleit- ist kleiner als die Haftreibung

1.5.3.2 Reibung zwischen Festkörper und Flüssigkeit oder Gas

Ursache der *viskosen* oder *inneren Reibung* bei der Bewegung eines Körpers in einem gasförmigen oder flüssigen Medium sind zwischenmolekulare Kräfte. Bei nicht zu schneller Bewegung wächst die Reibungskraft linear mit zunehmender Geschwindigkeit. Der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Reibungskraft für die Bewegung einer Kugel im viskosen Medium ist im *Stokesschen Gesetz* formuliert.

Reibungskraft und Geschwindigkeit sind zueinander proportional, solange benachbarte Flüssigkeitsschichten aufeinander abgleiten. Man nennt solche Strömungen *laminar*. Bei höheren Geschwindigkeiten oder ungünstiger Form des Körpers wird die Strömung *turbulent*. In diesem Fall wächst die Reibungskraft quadratisch mit der Geschwindigkeit, was Newton erstmals feststellte.

Formel	Erläuterung
$F_R = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$	Stokessches Gesetz für Reibung bei laminarer Strömung
η	Viskosität der Flüssigkeit
r	Radius eines kugelförmigen Körpers
v	Geschwindigkeit des Körpers in der Flüssigkeit

Tabelle 2 Stokessche Reibung bei laminarer Strömung

<table>
<tr><th colspan="3">Formel</th><th>Erläuterung</th></tr>
<tr><td colspan="3">$F_R = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$</td><td>Newtonsches Gesetz für Reibung bei turbulenter Strömung</td></tr>
<tr><td colspan="3">c_W</td><td rowspan="5">Widerstandskoeffizient, der von der Form des Körpers bestimmt wird</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>Form</td><td>c_W</td></tr>
<tr><td>Stromlinienform</td><td><1</td></tr>
<tr><td>Kugel</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Ungünstige Form</td><td>>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">A</td><td>Querschnitt des Körpers, in Bewegungsrichtung gesehen</td></tr>
<tr><td colspan="3">ρ</td><td>Dichte der Flüssigkeit</td></tr>
<tr><td colspan="3">v</td><td>Geschwindigkeit des Körpers in der Flüssigkeit</td></tr>
</table>

Tabelle 3 Newtonsche Reibung bei turbulenter Strömung

1.5.3.3 **Energieerhaltung und Reibungskräfte**

Obwohl die Reibungskräfte wie alle anderen Kräfte mit einer Federwaage meßbar sind, wirken sie auf ganz besondere Weise auf die Physik eines Systems. Im Versuch mit dem Federpendel wurde gezeigt, daß die Trägheitskraft und die Kraft, die eine Feder spannt, im Laufe der Schwingung beliebig oft ausgetauscht werden. Das ist mit der Reibungskraft unmöglich. Ein Körper, der in Folge der Reibungskraft stehen bleibt, setzt sich von selbst nicht wieder in Bewegung. Es erhöht sich aber die Bewegung seiner Atome oder Moleküle: Die beim Bremsen aufgebrauchte Energie erwärmt den Körper.

1.5.4 Fall im viskosen Medium

Die Fallbeschleunigung g ist für alle Körper gleich. Bei ausschließlicher Wirkung der Schwerkraft fallen deshalb alle Körper gleich schnell. Berücksichtigt man aber beim Fall in einem Medium außer der Schwer- auch die Reibungskraft, dann bestätigt auch die Rechnung die alltägliche Erfahrung, daß unterschiedlich schwere Körper (Stahlkugel und Daune) eben doch unterschiedlich schnell fallen.

Die Bewegungsgleichung des freien Falls wird unabhängig von der Masse, weil schwere und träge Masse ununterscheidbar sind. Die mathematische Behandlung des Falls im Medium führt auf eine Bewegungsgleichung, die von der Masse abhängt. Die Lösung dieser Art von Differentialgleichung durch geeignete Substitution zeigt schließlich das Geschwindigkeits-Zeit und, nach dessen Integration, das Weg- Zeit Gesetz.
(Herleitung: http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/Fall_mit_Reibung.DOC)

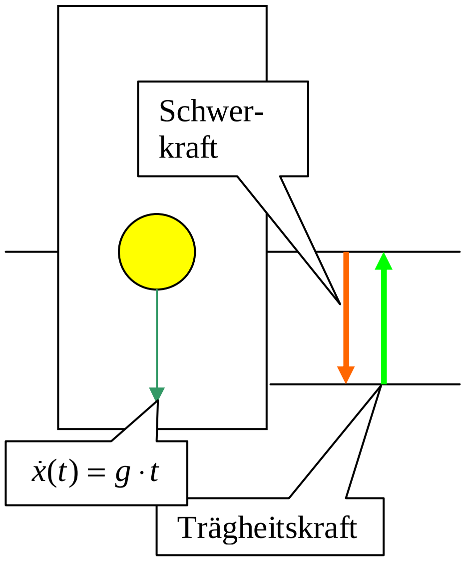
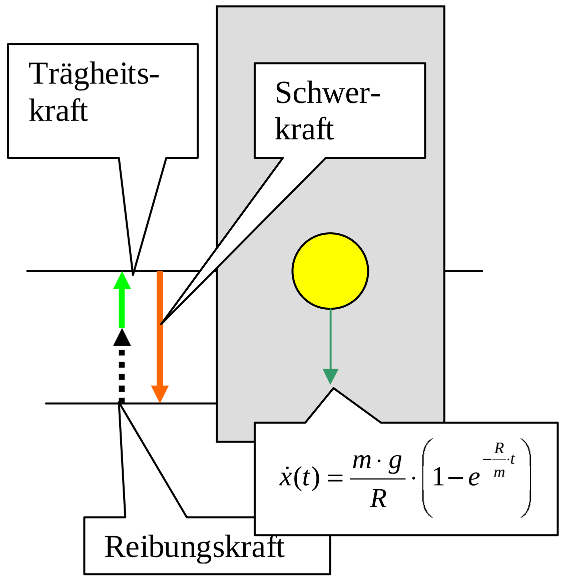
Freier Fall im Vakuum	Fall im Medium mit Reibungswiderstand R
	

Tabelle 4 Freier Fall im Vakuum und Fall im viskosen Medium. (Vektoren der Kräfte: rot: Schwerkraft, grün: Trägheitskraft, schwarz strichliert: Reibungskraft. Vektoren der Geschwindigkeiten: dunkelgrün)

$\dot{x}(t) = \frac{m \cdot g}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{m} \cdot t}\right)$	Geschwindigkeits- Zeitgesetz für die im viskosen Medium fallenden Teilchen
$\lim\limits_{t \to \infty} \dot{x}(t) = \frac{m \cdot g}{R}$	Bei gleicher Form der Körper hängt deren Höchstgeschwindigkeit von der Masse m und vom Koeffizienten der Reibung R ab

Tabelle 5 Geschwindigkeits- Zeitgesetz für den Fall eines Körpers der Masse m im Medium der Viskosität η.

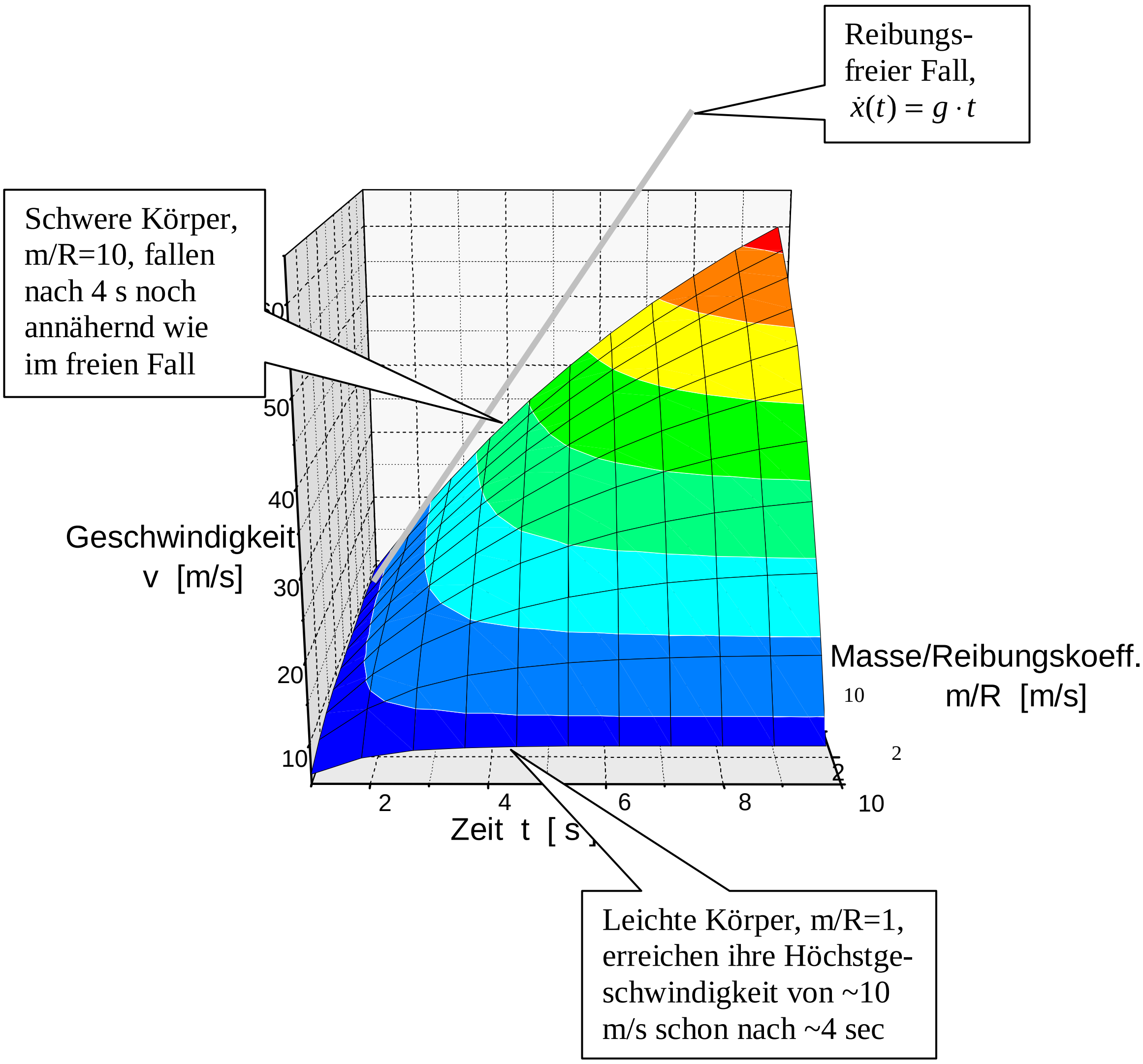


Abbildung 2 Geschwindigkeit- Zeit- Gesetz für den Fall eines Körpers der Masse m im Medium der Reibungszahl R. Das Verhältnis m/R variiert zwischen 1 für „leichte“ Körper (im Vordergrund) und 10 für „schwere“ Körper (im Hintergrund). Zum Vergleich die Geschwindigkeits- Zeit Gerade für den freien Fall, die unabhängig von der Masse ist.

1.6 Trägheitskräfte

1.6.1 Das d'Alembertsche Prinzip

In den Bewegungsgleichungen für die Fallgesetze und die Schwingung wurde den auf einen Körper wirkenden äußeren Kräften, der Gravitations-, Feder- und Reibungskraft, immer eine Trägheitskraft gegenübergestellt, die gleich der Summe der äußeren Kräfte ist. Die so definierte Trägheitskraft wird im „d'Alembertschen Prinzip" als eine Kraft eingeführt, die in einem dynamischen System zu allen anderen Kräften das Gleichgewicht hält.

Abbildung 3 Jean Le Rond d´Alembert, 16.11.1717-29.10.1783, Mathematiker, Philosoph und Literat

Das d'Alembertsche Prinzip formuliert das Gleichgewicht der Kräfte in der Dynamik analog zur Statik. In der Dynamik kommt aber mit der Trägheitskraft die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit, $\ddot{\vec{x}}$, in die Gleichung. Dadurch wird die Kräftesumme zur Bewegungsgleichung.

Formel	Anmerkung
$\vec{F}_T = -\sum_i \vec{F}_i$	Der Betrag der Trägheitskraft berechnet sich aus der Summe aller auf einen Körper wirkenden äußeren Kräfte. Sie ist dieser Summe entgegengerichtet.
$\vec{F}_T = -m \cdot \ddot{\vec{x}}$	Trägheitskraft, der Beschleunigung entgegengerichtet
$\vec{F}_i$	Äußere Kraft, z. B. Schwerkraft, Reibungs- oder Federkraft

Tabelle 6 Definition der d'Alembertschen Trägheitskraft

Die Summe der tatsächlich wirkenden Kräfte und der Trägheitskraft ist Null.

1.6.1.1 Trägheitskräfte zur Formulierung der Bewegungsgleichung beim Fall im viskosen Medium

Eine Anwendung des d'Alembertschen Prinzips ist die Vektor Konstruktion zum Aufbau der Bewegungsgleichung zum Fall im viskosen Medium, ein Gegenstand der Forschung von d'Alembert. Man erkennt daran auch, daß die d' Alembertsche Trägheitskraft nur nicht-kräftefreie, also beschleunigte Bewegungen beschreibt. Konstante Sinkgeschwindigkeit wird im Grenzfall langer Zeiten erreicht, wenn die Reibungs- gleich der Schwerkraft ist. Die d'Alembertsche Trägheitskraft wird dann null, weil sich der Körper gleichförmig, d.h. ohne Beschleunigung, also kräftefrei bewegt.

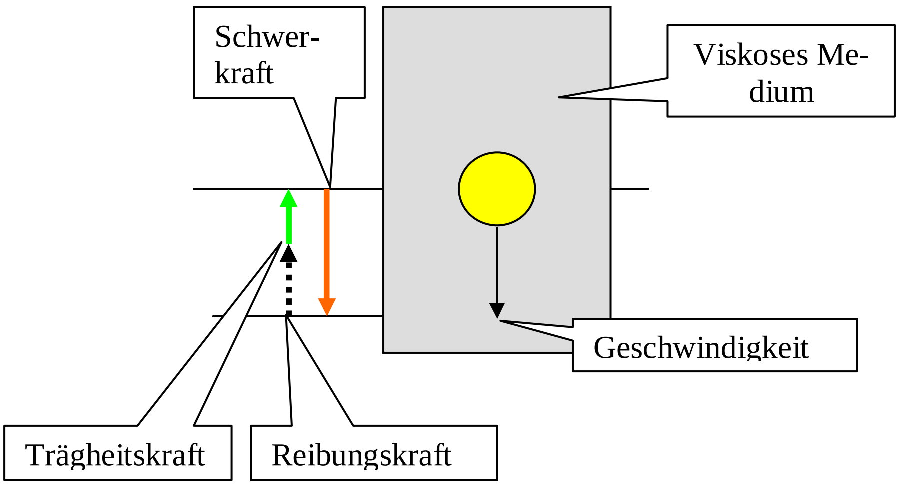


Abbildung 4 Kräftesumme beim Fall im viskosen Medium während der Beschleunigung: Die Vektorsumme aus Schwer-(rot) und Reibungskraft (schwarz strichliert) ist, gemäß dem d'Alembertschen Prinzip, gleich der Trägheitskraft (grün).

1.6.1.2 Trägheitskräfte bei beschleunigter Bewegung im Aufzug

Man weiß von Fahrten im Aufzug, daß man sich beim Anfahren zur Fahrt abwärts und beim Bremsen nach Fahrt aufwärts „erleichtert" fühlt: Die Trägheitskraft ist der wirkenden Beschleunigung in beiden Fällen immer entgegengerichtet und hebt daher die Gewichtskraft teilweise auf. Vollständig aufgehoben wird sie im freien Fall des Aufzugs, was in speziellen Falltürmen zur Untersuchung der Schwerkraft freien Zustands genützt wird.

Versuch 4 Fahrstuhl mit beschleunigter Masse, vgl. die Abbildungen in der folgenden Tabelle.

Formel	Erläuterung
$\vec{F}_T + \vec{F}_G + \vec{F}_F = 0$	D'Alembertsches Prinzip
$\vec{F}_T = -m \cdot \ddot{\vec{x}}$	Trägheitskraft
$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$	Gewichtskraft
$\vec{F}_F = k \cdot \vec{x}$	Federkraft

Tabelle 7 D'Alembertsches Prinzip und Kräfte beim Fahrstuhlversuch

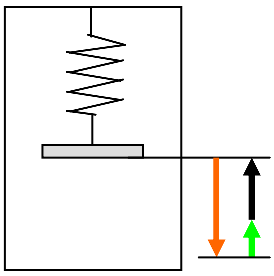
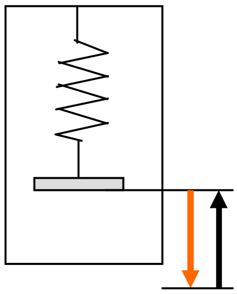
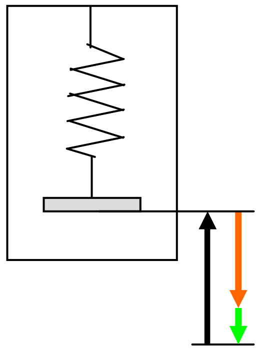
Der Aufzug fährt abwärts: Die nachlassende Federkraft zeigt, daß die Trägheitskraft nach oben gerichtet ist.	Der Aufzug steht, statische Anordnung: Die Trägheits-kraft ist null, die Feder zeigt nur die Gewichtskraft.	Der Aufzug fährt aufwärts: Die zunehmende Federkraft zeigt, daß die Trägheitskraft nach unten gerichtet ist.
		

Tabelle 8 Richtung der Kräfte beim Fahrstuhlversuch. Die von der Federwaage ausgeübte Kraft (schwarz) ist die Summe von Gewichts- (rot) und Trägheitskraft (grün).

Analog zum Fahrstuhlversuch ist der Versuch mit der „Poggendorfschen Waage“. An die Stelle der Feder tritt die Waage, deren Ausschlag zeigt die aufwärts zu- und abwärts abnehmende Summe von Gewichts- und Trägheitskraft.

Versuch 5 Poggendorfsche Waage. In der Mitte der Waage befindet sich ein „Antriebsgewicht“. Durch geeignete Verteilung von 2 gleichen Zusatzgewichten fährt der Aufzug auf der rechten Seite auf oder ab.

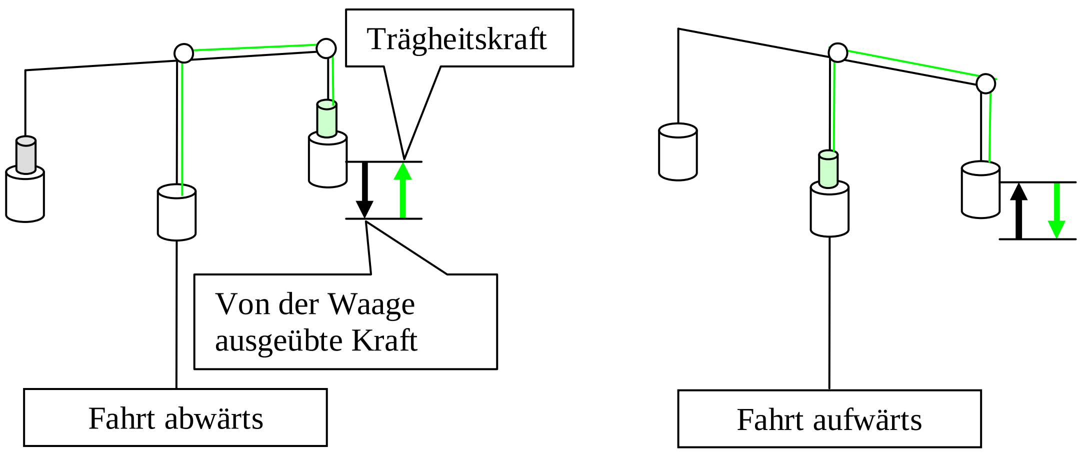


Abbildung 5 Poggendorfsche Waage. Die Gewichtskraft des Aufzugs ist immer kompensiert. Die von der Waage ausgeübte Kraft (schwarz) ist entgegengesetzt gleich der Trägheitskraft (grün).

Fahrtrichtung	Zusatzgewichte			Start durch Abbrennen einer Halteschnur am
	Links	Mitte	Rechts	
Aufwärts				Gewicht in der Mitte
Abwärts				Gewicht rechts

Tabelle 9 Verteilung der Zusatzgewichte bei der Poggendorfschen Waage. Grau: Ausgleichsgewicht, grün: Antriebsgewicht.

Schwerer zu durchschauen ist ein zum Aufzug analoger Versuch mit dem „Maxwellschen Rad“, bekannt als „Jo-Jo“. Aus dessen Betrieb weiß man, daß das Rad beim Lauf abwärts leichter wird, mit einem Ruck unten ankommt und aufwärts läuft, wobei es sich aber genau so leicht anfühlt wie beim Lauf abwärts. Der folgende Versuch bestätigt diesen Eindruck.

Versuch 6 Maxwellsches Rad

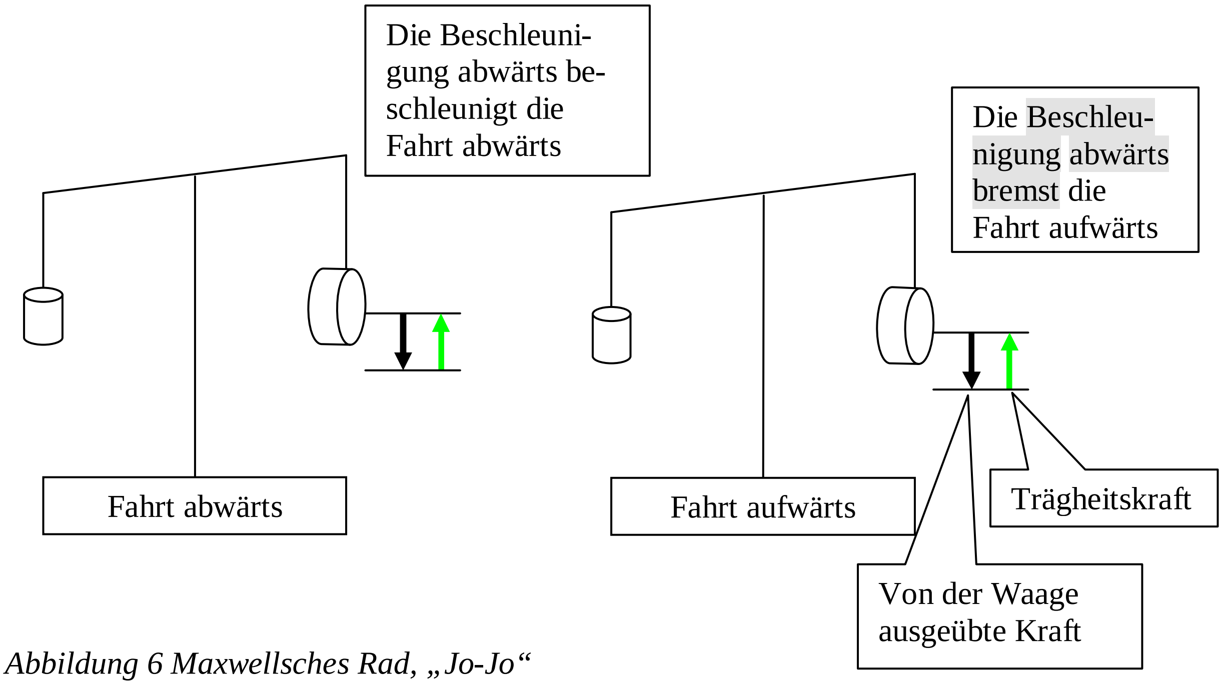


Abbildung 6 Maxwellsches Rad, „Jo-Jo“

Der Lauf abwärts erfolgt wie beim Aufzug beschleunigt, die Gewichtskraft verringert sich um die Trägheitskraft. Am Umkehrpunkt wird die Geschwindigkeit ruckartig umgekehrt, weil das Rad die Bewegungsenergie gespeichert hat. Die Bewegung wird gewissermaßen reflektiert, die Aufwärtsfahrt beginnt mit der höchsten Geschwindigkeit, die Beschleunigung bleibt aber nach unten gerichtet und bremst während der Hochfahrt das Rad ab. Nach wie vor verringert die nach oben gerichtete Trägheitskraft die Gewichtskraft, analog zur Empfindung im Aufzug, wenn er nach Fahrt aufwärts abbremst.

Im Gegensatz zum Jo-Jo fährt der Aufzug in Richtung aufwärts aus dem Stand mit nach oben gerichteter Beschleunigung los. Bei ihm erhöht beim Start die nach unten gerichtete Trägheitskraft die Gewichtskraft, die Erleichterung folgt erst beim Bremsen.

1.6.1.3 Trägheits- und Reibungskraftkraft bei kurzzeitiger, hoher Beschleunigung

Ein auf einer Unterlage stehender Körper soll durch Beschleunigung der Unterlage in Bewegung versetzt werden. Die bei Beginn der Bewegung des Körpers entstehende Trägheitskraft ist aber immer kleiner oder gleich der Haftreibungskraft. Mit hoher Beschleunigung kann eine kurze Unterlage ganz hervorgezogen werden, bevor der Körper merklich beschleunigt ist.

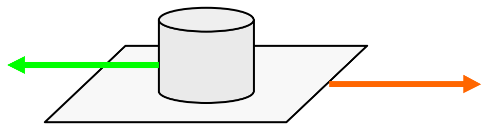
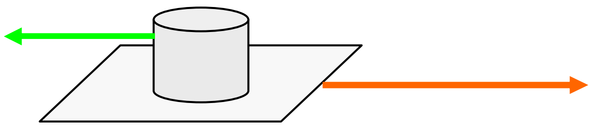
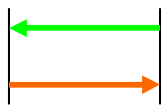
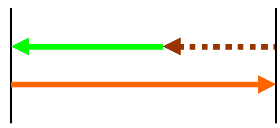
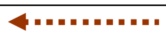
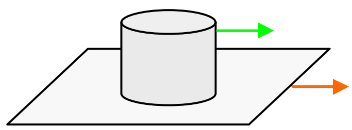
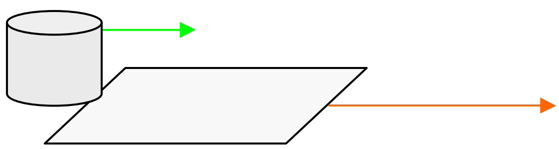
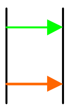
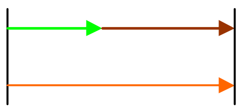
<table>
<tr><td colspan="3">Die maximale Beschleunigung des Körpers wird erreicht, wenn seine Trägheitskraft gleich seiner Haftreibungskraft F_{RH} auf der Unterlage wird. Wird die Unterlage mit Kraft F_U stärker beschleunigt, dann wirkt auf den Körper die Gleitreibungskraft F_{RG} beschleunigend.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$F_U \le F_{RH}$</td><td>$F_U > F_{RH}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Kräfte:</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$F_T = -m \cdot \ddot{x}_T$</td><td>Trägheitskraft des Körpers</td></tr>
<tr><td></td><td>$F_{RH} = \mu_H \cdot g \cdot m$</td><td>Haftreibungskraft, Reibungskoeffizient μ_H</td></tr>
<tr><td></td><td>$F_{RG} = \mu_G \cdot g \cdot m$</td><td>Gleitreibungskraft, Reibungskoeffizient μ_G</td></tr>
<tr><td></td><td>$F_U = -m \cdot \ddot{x}_U$</td><td>Beschleunigende Kraft, zieht an der Unterlage</td></tr>
<tr><td colspan="3">Beschleunigungen</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\ddot{x}_U$</td><td>Beschleunigung der Unterlage</td></tr>
<tr><td></td><td>$\ddot{x}_T$</td><td>Beschleunigung des Körpers</td></tr>
<tr><td></td><td>$\ddot{x}_{U-T}$</td><td>Beschleunigung der Unterlage relativ zum Körper</td></tr>
</table>

Tabelle 10 Kräfte und Beschleunigungen für einen Körper auf einer beschleunigten Unterlage. Links: Langsame Bewegung, rechts ruckartige Bewegung der Unterlage

Versuch 7 Mit einem Ruck wird ein Papier unter einem Gewicht hervorgezogen. Aufgrund der Trägheitskraft bleibt das Gewicht annähernd liegen. Links: Kleine Beschleunigung. Die Trägheitskraft ist kleiner als die Reibungskraft, der Körper wird beschleunigt, d. h. der Körper fährt auf dem Papier davon. Rechts: Hohe Beschleunigung: Die Trägheitskraft wird so groß wie die Haftreibungskraft, der Körper setzt sich in Bewegung, damit reduziert sich die Reibungskraft auf die der Gleitreibung. Die Unterlage wird beschleunigt (strichlierter Pfeil) unter dem Körper durchgezogen.

Versuch 8 Ein Gewicht hängt an einem Faden. Zieht man es an einem identischen Faden nach unten, dann reißt der obere Faden, weil er neben der Zug- noch die Gewichtskraft zu halten hat. Zieht man ruckartig, dann reißt der untere. Die Trägheitskraft ist viel größer als die Gewichtskraft und der obere Faden dehnt sich elastisch bei der kleinen Auslenkung durch die kurzzeitige Beschleunigung.

1.6.2 Zentrifugalkraft: Die Trägheitskraft bei der Kreisbewegung

Das Weg-Zeitgesetz für die Bewegung auf einer Kreisbahn (Abschnitt 1.2.1.2) zeigte, daß auf einen kreisförmig umlaufenden Massenpunkt eine Beschleunigung in Richtung des Zentrums wirkt. Multipliziert man diese Beschleunigung mit der Masse, dann erhält man die Zentripetalkraft, die den Massenpunkt auf der Kreisbahn hält. Nach dem d'Alembertschen Prinzip gibt es bei der Dynamik dieses Systems eine Trägheitskraft, die allen anderen Kräften das Gleichgewicht hält: Diese heißt Zentrifugalkraft, sie ist der Zentripetalkraft entgegengerichtet.

Kreisbahn, ϖ =const	Ort	Geschwindigkeit	Beschleunigung
Betrag	$s = r$	$v = r \cdot \varpi$	$a = r \cdot \varpi^2 = \frac{v^2}{r}$
Richtung	Der Ortsvektor zeigt vom Mittelpunkt zur Bahn	Der Vektor der Geschwindigkeit zeigt tangential zur Bahn	Der Vektor der Beschleunigung zeigt von der Bahn zum Mittelpunkt

Tabelle 11 Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung auf der Kreisbahn

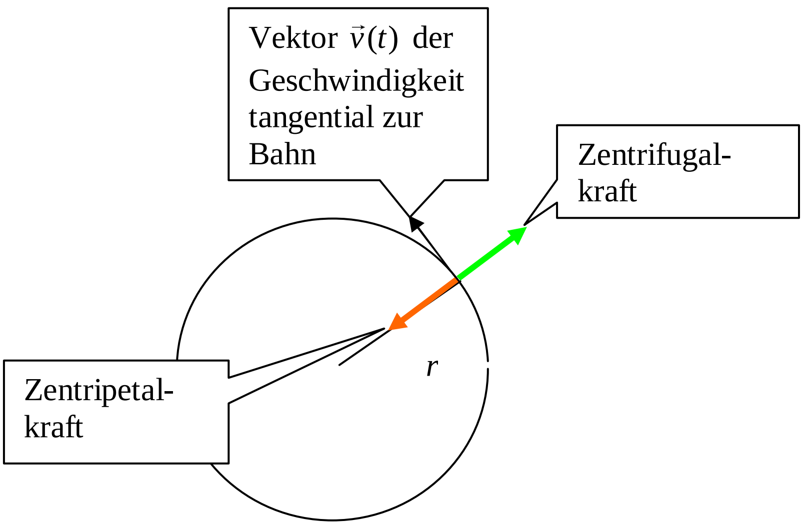


Abbildung 7 Zentripetal- und Zentrifugalkraft

Kraft	Betrag	Richtung
Zentripetalkraft	$F = m \cdot r \cdot \varpi^2$	Zum Zentrum hin
Zentrifugalkraft		Vom Zentrum weg

Tabelle 12 Zentripetal- und Zentrifugalkraft

Versuch 9 Schleiffunken fliegen tangential zum Schleifstein, wenn die Zentripetalbeschleunigung verschwindet.

Versuch 10 Eine rollende Kette wird durch die Zentripetal- bzw. Zentrifugalkraft stabilisiert.

Versuch 11 Rotierende Hantel mit zwei unterschiedlichen Massen. Eine Hantel mit 2 unterschiedlichen Massen ist in radialer Richtung verschiebbar gelagert. Im Gleichgewicht beider Zentrifugalkräfte liegt die Hantel stabil bei jeder Drehzahl.

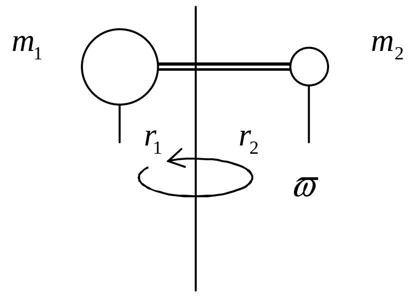
Formel	Anmerkung
$F_1 = m_1 \cdot r_1 \cdot \varpi^2$	Zentrifugalkräfte auf die Körper
$F_2 = m_2 \cdot r_2 \cdot \varpi^2$	
$F_1 = F_2$	Gleichgewicht beider Kräfte, die Hantel verschiebt sich nicht mehr in radialer Richtung: 
$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$	

Tabelle 13 Radien im Gleichgewicht der kreisförmig bewegten Hantel

Versuch 12 Eine plastische Kugel wird bei Rotation um eine Achse zum Geoid

1.6.2.1 Die Zentrifuge

Zentrifugalkraft und Reibungskraft sind die grundlegenden physikalischen Effekte zum Verständnis der Wirkung einer Zentrifuge. Stoffe in einer Suspension mit unterschiedlichen Dichten und Radien können getrennt werden, weil sie unterschiedlich schnell sedimentieren: Teilchen hoher Dichte sedimentieren schneller, d.h. man findet sie nach einer bestimmten Laufzeit der Zentrifuge außen abgelagert. Entscheidend für die Trennung ist *die Kombination von Zentrifugal- und Reibungskraft*, denn wirkt nur die Zentrifugalkraft, dann erfahren alle Körper die gleiche Zentrifugalbeschleunigung, d. h. sie fallen gleich schnell nach außen.

In einem rotierenden Gefäß zeigt die Oberfläche der Flüssigkeit ein parabelförmiges Profil, wie man aus der Summe der Vektoren der Kräfte leicht erkennt. Man betrachtet dazu den Querschnitt des Oberflächenprofils als einen Kurvenzug in der x-y Ebene. Die Oberfläche stellt sich so ein, daß die Resultierende aus Zentrifugal- und Schwerkraft senkrecht zu ihr steht.

Formel	Erläuterung
$F = m \cdot l \cdot \varpi^2$	Zentrifugalkraft, l steht für den Abstand zum Zentrum
$F_R = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$	Stokessches Gesetz: Reibungskraft bei laminarer Strömung im Medium der Viskosität η für kugelförmige Teilchen von Radius r mit Geschwindigkeit v
$m \cdot l \cdot \varpi^2 = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$	Beide Kräfte sind im Gleichgewicht
$m = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \rho$	Die Masse der Kugeln wird durch ihr Volumen und ihre Dichte ρ ausgedrückt
$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot l \cdot \varpi^2 = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$	
$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{\rho}{\eta} \cdot r^2 \cdot l \cdot \varpi^2$	Die Geschwindigkeit der Sedimentation ist proportional zur Dichte, dem Quadrat des Radius der Teilchen und der Zentrifugalbeschleunigung

Tabelle 14 Sedimendation in der Zentrifuge: Teilchen hoher Dichte liegen außen. Bei gleicher Dichte sedimetieren die großen Teilchen schneller.

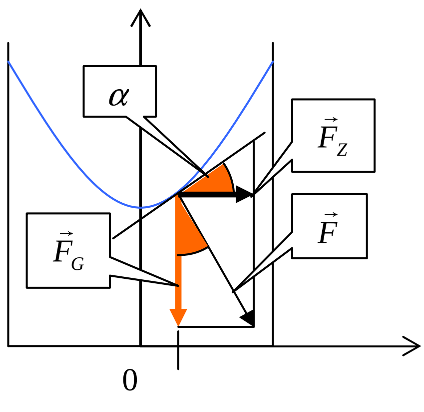


Abbildung 8 Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit, die y-Achse ist die Rotationsachse

Formel	Erläuterung
$F_G = m \cdot g$	Schwerkraft
$F_Z = m \cdot \varpi^2 \cdot x$	Zentrifugalkraft
$\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_Z$	Resultierende, steht senkrecht auf der Oberfläche und mit Winkel α zur $y-$Achse
$y' = \tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G}$	Anstieg der Kurve bei x
$y' = \frac{m \cdot \varpi^2}{m \cdot g} \cdot x$	
Nach Integration von y' folgt:	
$y = \frac{m}{2 \cdot g} \cdot x^2 + y_0$	Das Profil der Oberfläche ist eine Parabel

Tabelle 15 Berechnung des Profils der Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit

1.7 Inertial- und Nichtinertialsysteme

1.7.1 Inertialsysteme

Unter einem Inertialsystem versteht man ein Koordinatensystem, indem ein sich kräftefrei bewegender Körper seine Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung beibehält. In diesem System gilt also das erste Newtonsche Axiom, das Galileische Trägheitsgesetz.

Diese Definition erlaubt, daß sich Inertialsysteme mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen. Wird z. B. der Versuch mit der kräftefreien Dose auf dem Luftkissen gemäß der Abbildung unten im fahrenden Zug durchgeführt, dann zeigt er das gleiche Ergebnis wie im Labor, die Dose bewegt sich in jedem Fall mit konstanter Geschwindigkeit. Die Versuchsergebnisse werden in Koordinaten angegeben, deshalb definiert man jedes Inertialsystem durch sein Koordinatensystem. Möchte man die in einem Koordinatensystem beobachteten Werte in ein anderes Inertialsystem übertragen, dann gelten die Regeln der „Galilei Transformation“, wobei vor allem die Zeit eine absolute Größe ist und die Beschleunigungen invariant sind.

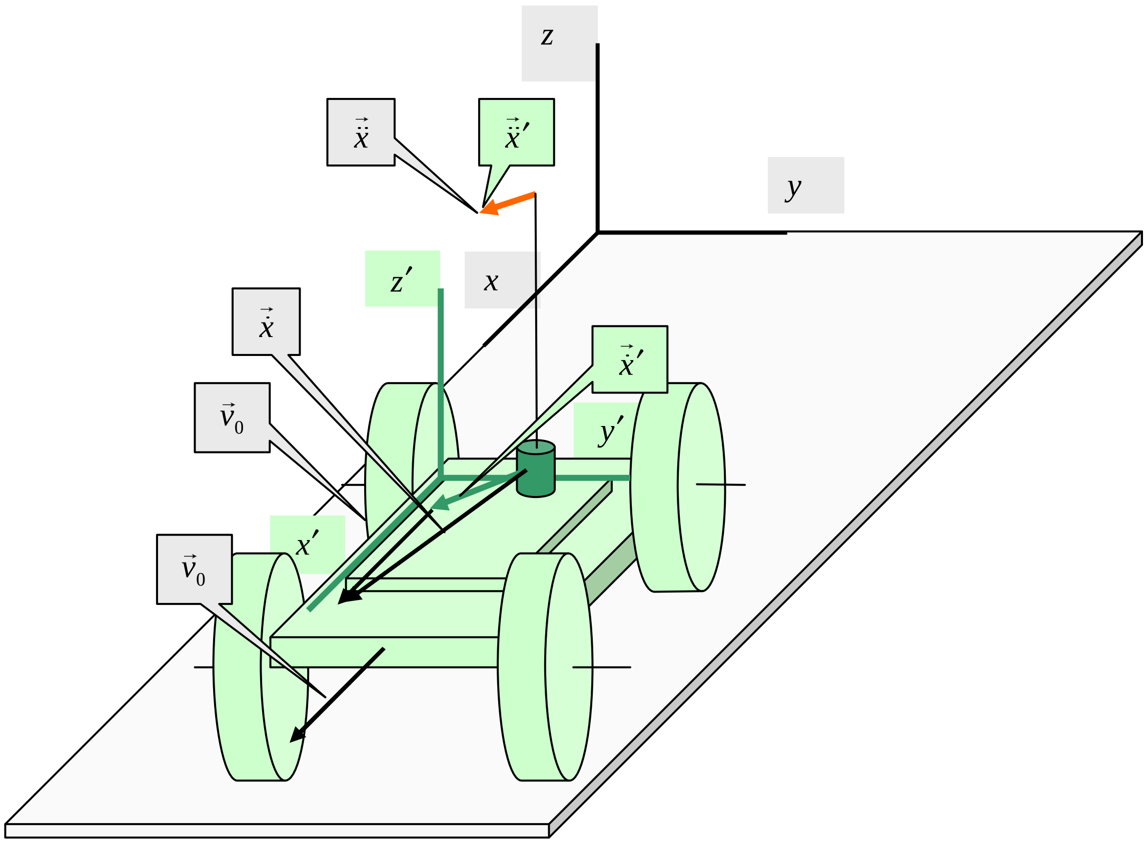


Abbildung 9 Zur Galilei-Transformation: Transformation der Geschwindigkeit eines auf dem fahrenden Wagen bewegten Körpers vom Koordinatensystem im Wagen(grün) in das ruhende (grau). Der Wagen fährt mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0$*.Die rote Fahne zeige die Beschleunigung: Sie ist in beiden Systemen gleich.*

Weil auch die Massen absolute Größen sind, folgt aus der Invarianz der Beschleunigungen die Gleichheit der Kräfte in allen Koordinatensystemen. Die Bewegungsgleichungen und alle physikalischen Gesetze zeigen damit in allen Inertialsystemen dieselbe Form. Man bezeichnet dieses als das „spezielle Relativitätsprinzip“.

	Ort	Geschwindig-keit	Beschleunigung	Zeit
Eine Dimension	$x = x' + v_0 \cdot t$	$\dot{x} = \dot{x}' + v_0$	$\ddot{x} = \ddot{x}'$	$t = t'$
Vektoriell	$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{v}_0 \cdot t$	$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}' + \vec{v}_0$	$\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}'$	

Tabelle 16 Galilei Transformation von einem Inertialsystem in das andere, durch einen Strich gekennzeichnete.

1.7.2 Nichtinertialsysteme

Nichtinertialsysteme sind Koordinatensysteme, die sich gegenüber einem Inertialsystem beschleunigt bewegen. Die Physik erscheint einem Beobachter in einem beschleunigten System gegenüber der im ruhenden verändert. Dieses stimmt mit der Erfahrung überein, daß sich z. B. der Kaffee in einer Tasse im Auto oder im Zug unabhängig von der Geschwindigkeit wie gewohnt verhält, aber nicht beim Bremsen und in Kurven.

Weil sich die Erde dreht, ist ein Koordinatensystem im Labor kein Inertialsystem. Bei den meisten Versuchen fallen die dadurch verursachten Abweichungen von den für ein Inertialsystem erwarteten Ergebnissen nicht auf. Es gibt aber Versuche, in denen sie offen zutage treten. Wird ein Pendel im Schwerefeld der Erde gestartet, dann erwartet man gemäß der Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels eine Schwingung in einer Ebene. Tatsächlich beobachtet man schon nach 5,2 Minuten, daß die Schwingungsebene um 1^0 auswandert. Das Pendel pendelt in einem „Universum“ festen Inertialsystem in einer Ebene. Die Erde – und damit das Labor – dreht sich in diesem Inertialsystem.

Im rotierenden Koordinatensystem wirkt auf einen Massenpunkt, der im rotierenden System ruht, die schon bekannte Zentrifugalkraft. Wenn sich der Punkt in radialer Richtung bewegt, dann erscheint außerdem noch die Corioliskraft.

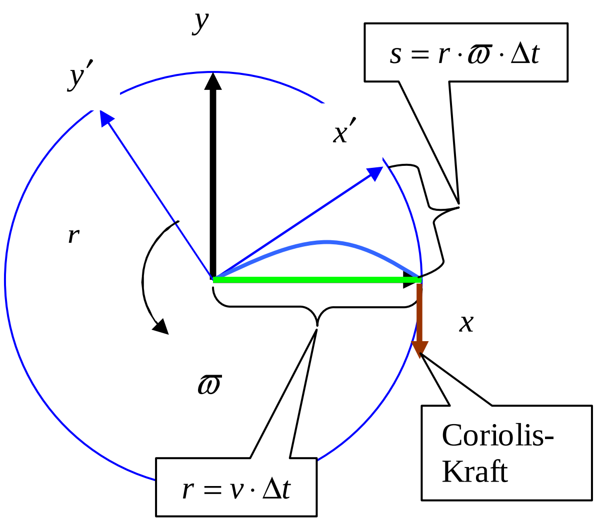


Abbildung 10 Zur Ableitung der Corioliskraft: Ein Punkt bewege sich in Richtung x im ortsfesten Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit v, ein zweites Koordinatensystem rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ϖ .

Im ortsfesten Koordinatensystem bewege sich ein Punkt mit konstanter Geschwindigkeit nach außen. Zeitgleich sei in gleicher Richtung und Geschwindigkeit ein Beobachter im rotierenden Koordinatensystem gestartet. Dieser Beobachter wandere auf einem Radiusvektor nach außen und erkennt, daß der Punkt im festen Koordinatensystem sich senkrecht zum Radiusvektor von ihm entfernt. Die Geschwindigkeiten waren anfangs gleich, deshalb nimmt er an, daß auf den Punkt eine Beschleunigung wirkt. Die dazu erforderliche Kraft heißt Corioliskraft. Nach der Zeit Δt liegt der Punkt um die Länge eines Kreisbogens neben dem erwarteten Ankunftsort. Aus dem Weg-Zeitgesetz errechnet sich die Beschleunigung.

Formel	Erläuterung
$s = r \cdot \varpi \cdot \Delta t$	Länge des Kreisbogens nach der Zeit Δt
$r = v \cdot \Delta t$	Zeit, Weg und Geschwindigkeit im ruhenden System
$s = v \cdot \Delta t \cdot \varpi \cdot \Delta t$	Länge des Kreisbogens, r substituiert, abhängig von ϖ, v und Δt
$s = \frac{a}{2} \Delta t^2$	Weg-Zeitgesetz für beschleunigte Bewegung
$a = 2 \cdot v \cdot \varpi$	Beschleunigung, die den Punkt von der - im rotierenden Koordinatensystem - geradlinigen Bahn in radialer Richtung ablenkt.
$F_C = 2 \cdot m \cdot v \cdot \varpi$	Corioliskraft, die der Beobachter im rotierenden Koordinatensystem als Ursache der Beschleunigung annimmt.

Tabelle 17 Zur Ableitung der Corioliskraft

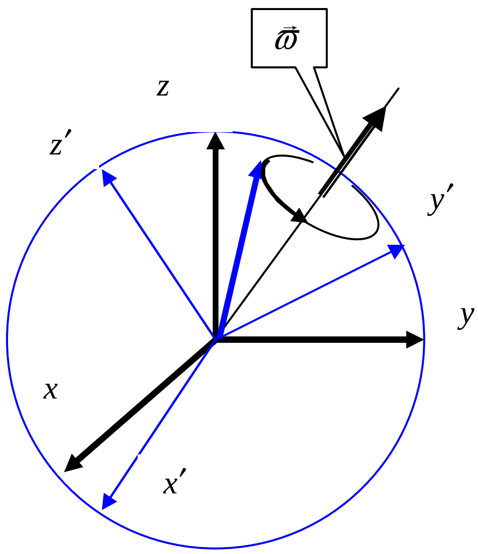


Abbildung 11 Die Richtung der Drehachse und der Drehsinn definiert die Richtung des Vektors der Winkelgeschwindigkeit bei allgemeiner Lage des Koordinatensystems

Versuch 13 Das Foucault Pendel. Die Schwingungsebene ist in einem Inertialsystem außerhalb der rotierenden Erde definiert.

	Ebene mit Drehachse senkrecht dazu	Drei Dimensionen, Drehachse beliebig
Winkelgeschwindigkeit	ϖ	$\vec{\varpi}$
Bahngeschwindigkeit	$v = \varpi \cdot r$	$\vec{v} = \vec{\varpi} \times \vec{r}$
Zentrifugalkraft	$F_Z = m \cdot r \cdot \varpi^2$	$\vec{F}_Z = -m \cdot \vec{\varpi} \times (\vec{\varpi} \times \vec{r})$
Corioliskraft	$F_C = 2 \cdot m \cdot v \cdot \varpi$	$\vec{F}_C = 2 \cdot m \cdot \vec{v} \times \vec{\varpi}$

Tabelle 18 Kräfte im rotierenden Koordinatensystem

1.7.3 Der Foucaultsche Pendelversuch in Tübingen

Das Foucaultsche Pendel schwingt senkrecht zum Lot auf die Erdoberfläche. Die auf das Pendel wirkende Corioliskraft errechnet sich mit der Projektion der Winkelgeschwindigkeit der Erde auf das Lot zur Erdmitte in Tübingen.

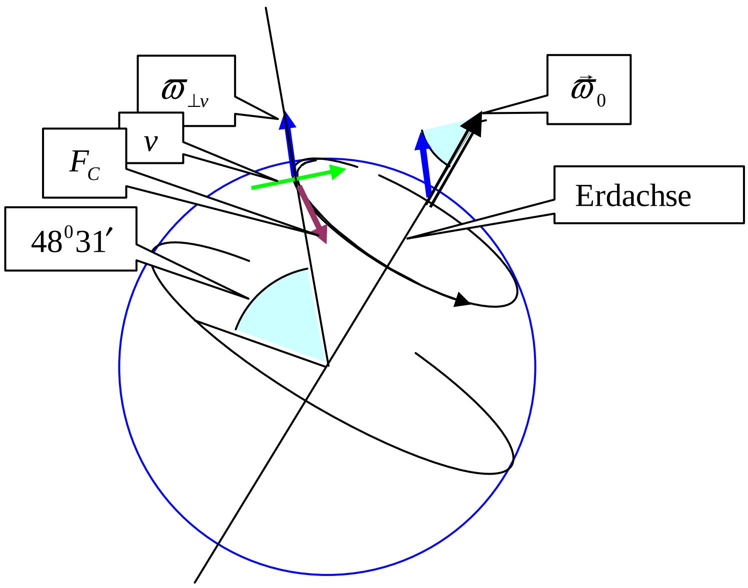


Abbildung 12 Foucaultscher Pendelversuch in Tübingen

Formel	Erläuterung
$\vec{F}_C = 2 \cdot m \cdot \vec{v} \times \vec{\varpi}$	Corioliskraft bei allgemeiner Lage von Drehachse und Geschwindigkeit
$F_C = 2 \cdot m \cdot v \cdot \varpi_{\perp v}$	Corioliskraft, falls die Drehachse senkrecht zur Geschwindigkeit steht
$\varpi_0 = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60}\left[\frac{1}{s}\right] = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\left[\frac{1}{s}\right]$	Winkelgeschwindigkeit der Erde um die Erdachse
$\varpi_{\perp v} = \varpi_0 \cdot \sin 49^0$	Komponente der Winkelgeschwindigkeit senkrecht zum Lot in Tübingen
$T_{49^0} = \frac{2 \cdot \pi}{\varpi_{\perp v}} = 31\ \text{h}\ 48\ \text{min}$	Zeit für eine volle Umdrehung der Schwingungsebene in Tübingen, das entspricht der Drehung um 1^0 in $5\ \text{min}\ 18\ \text{s}$.

Tabelle 19 Berechnung der Zeit, in der sich die Pendelebene des Foucaultschen Pendels in Tübingen um 1^0 dreht.

1.7.4 Corioliskraft und Windsytem

Die Corioliskraft wirkt bei jeder Bewegung auf der nördlichen Erdhalbkugel in Richtung einer Ablenkung nach rechts, auf der südlichen Halbkugel nach links. Auf ihrem Weg vom Nordpol in Richtung Äquator sind die Luftmassen bezüglich der zunehmenden Umfangsgeschwindigkeit immer zu langsam. Die Erdoberfläche bewegt sich in Richtung Osten, deshalb bleiben sie in westlicher Richtung zurück, werden also nach rechts abgelenkt. Der Einfluß der Corioliskraft ist im Windsystem der Erde gut zu erkennen.

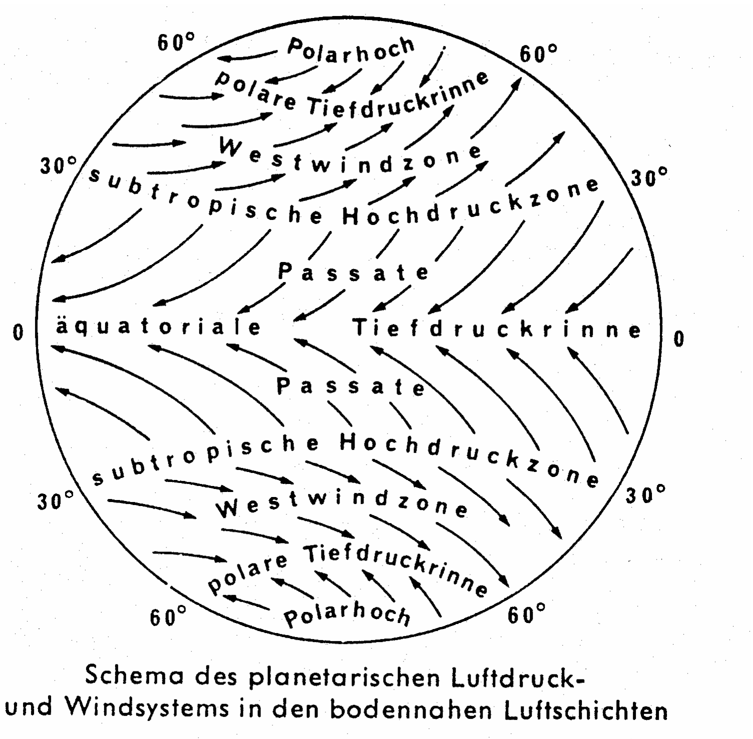


Abbildung 13 Das planetarische Luftdruck und Windsystem zeigt die Ablenkung der Luftmassen durch die Corioliskraft. Quelle: Meyers Enzyklopädisches Lexikon (1971)Band 2, S. 858