

### 6.1.7 Die Elementarladung

Im Millikan Versuch zeigt die Beobachtung der Sinkgeschwindigkeit von Öltröpfchen in einem geladenen Kondensator, daß sich bei kontinuierlicher Erhöhung der Spannung das Bewegungsmuster der Tröpfchen unstetig ändert. Man erkennt daraus, daß die Ladungen auf den Tröpfchen offenbar kleine Vielfache einer „Elementarladung“ sind. Auf die elektrostatisch aufgeladenen Tröpfchen wirkt einerseits die Coulomb Kraft, andererseits die Schwerkraft.

Entsprechende Wahl der Spannung am Kondensator bringt die Tröpfchen bei Kräftegleichheit zum Schweben. Die Spannung  $U$  am Kondensator und der Plattenabstand  $d$  zeigen, wie aus den folgenden Gleichungen ersichtlich wird, die Ladung der Tröpfchen mit Masse  $m$ .

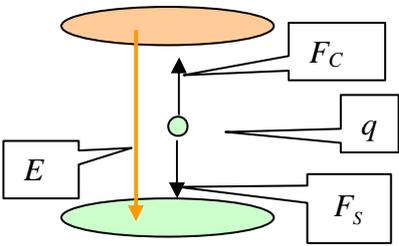
Formel	Anmerkung
Kräfte auf das geladene Tröpfchen:	
$F_C = -q \cdot E$	Coulomb-Kraft
$F_S = m \cdot g$	Schwerkraft
Das Tröpfchen schwebt, wenn es kräftefrei ist:	
$F_C + F_S = 0$	Die Summe der Kräfte ist Null, daraus folgt:
$q = \frac{m \cdot g}{E} = \frac{m \cdot g \cdot d}{U}$	Ladung des Tröpfchens, wenn am Kondensator mit Plattenabstand $d$ die Spannung $U$ anliegt.
	Schema des Millikan Versuchs

Tabelle 1 Zum Millikan Versuch

#### 6.1.7.1 Messung des Radius der Tröpfchen mit Hilfe des Stokesschen Gesetzes

Zur quantitativen Bestimmung von  $q$  nach dem Millikan Versuch fehlt noch die Masse  $m$  der Tröpfchen. Bei Annahme von Kugelgestalt und bekannter Dichte ist also der Radius  $r$  der Teilchen zu bestimmen. Dieser wird, in einer klassischen Anwendung des Stokesschen Gesetzes, aus der Sinkgeschwindigkeit  $v$  in Luft ermittelt. Bei Normaldruck ist die Reibungskraft  $F_R$  proportional zur Sinkgeschwindigkeit  $v$  und dem Kugelradius  $r$ , es gilt also das Stokessche Gesetz im Medium der Viskosität  $\eta$ . Zur genauen Messung muß auch der Auftrieb der Öltröpfchen mit Dichte  $\rho_{\text{Öl}}$  und Volumen  $V$  in Luft der Dichte  $\rho_{\text{Luft}}$  berücksichtigt werden. Bei konstanter Sinkgeschwindigkeit bewegen sich die Tröpfchen kräftefrei, aus dem Gleichgewicht der Kräfte folgt der Radius der Tröpfchen.

Formel	Anmerkung
Mechanische Kräfte auf das Tröpfchen:	
$F_R = -6\pi r \eta v$	Reibungskraft
$F_A = -\rho_{Luft} \cdot g \cdot V$	Auftriebskraft
$F_S = \rho_{öl} \cdot g \cdot V$	Gewichtskraft
Bei konstanter Sinkgeschwindigkeit gilt:	
$F_R + F_A + F_S = 0$	Das Teilchen bewegt sich kräftefrei, die Summe der Kräfte ist Null
$-6\pi r \eta v - \rho_{Luft} \cdot g \cdot V + \rho_{öl} \cdot g \cdot V = 0$	
$V = \frac{4\pi}{3} r^3$	Wird das Volumen des Tröpfchens, in Abhängigkeit vom Radius, eingesetzt, dann folgt:
$r^2 = \frac{9\eta v}{2g \cdot (\rho_{öl} - \rho_{Luft})}$	Radius $r$ , daraus folgt die Masse des Tröpfchens. Damit kann die Ladung aus dem Gleichgewicht von Coulomb- und Schwerkraft berechnet werden.
$m = \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot \rho_{öl}$	

Tabelle 2 Bestimmung des Radius der Tröpfchen aus ihrer Sinkgeschwindigkeit.

Die präzise Messung ergibt für das kleinste Vielfache aller Ladungen:

$e_0 = 1.6021892 (46) 10^{-19} \text{ C}$	Betrag der Elementarladung
---	----------------------------

**Versuch 1 Modell des Millikan Versuchs.** Eine Kugel aus Silberpapier wird in einer "Potentialmulde" im Feld eines Plattenkondensators zum Schweben gebracht. Das zunächst homogene Feld zwischen den Platten des Kondensators wird bei geeigneter Position einer gerdeten Spitze so gestört, daß die geladene Kugel in Schwebelage gehalten wird.

### 6.1.8 Dielektrizitätskonstante, Polarisation und Suszeptibilität

Dielektrika sind isolierende Stoffe. Bringt man ein Dielektrikum zwischen die Platten eines Kondensators, dann *erhöht* sich die Kapazität bezüglich  $C_{vak}$  auf

$$C = \epsilon \cdot C_{vak}$$

Die Material abhängige Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  zeigt das Verhältnis der durch Einschieben des Stoffes erhöhten Kapazität zu der im Vakuum.

**Versuch 2** Ein Kondensator wird statisch aufgeladen und dessen Spannung mit einem Elektrometer überprüft. Wird ein Dielektrikum eingebracht, dann sinkt die Spannung, wegen  $U = Q/C$  steigt also die Kapazität  $C$ . Bei entfernen des Dielektrikums steigt sie auf ihren ursprünglichen Wert.

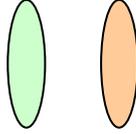
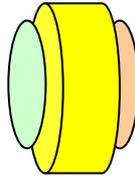
Kondensator in Luft	Kondensator mit Dielektrikum
	
$U = \frac{Q}{C_{vak}}$	$U = \frac{1}{\epsilon} \frac{Q}{C_{vak}}$

Tabelle 3 Spannung bei konstanter Ladung im Kondensator in Luft und mit Dielektrikum

Die Abnahme der Spannung bei unveränderter Ladung bzw. Ladungsdichte  $\sigma_0$  auf den Platten zeigt, daß die Feldstärke  $E_{vak}$  im Kondensator auf  $E_{vak} / \epsilon$  abgesenkt wird. Offensichtlich entsteht im Dielektrikum ein Feld  $E_{pol}$  durch Ladungen auf dessen Oberfläche, das dem des Plattenkondensators entgegengerichtet ist. Die Ladungen  $\sigma_p$  werden durch Polarisation der Atome oder Moleküle des Dielektrikums im Feld des Kondensators erzeugt:

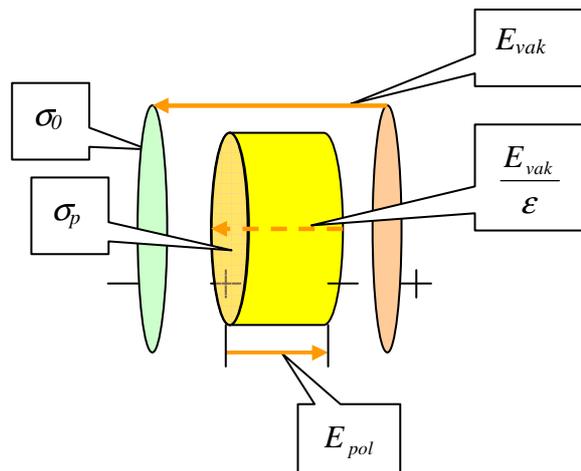


Abbildung 1 Ladungsdichten und Feldstärken im Plattenkondensator mit Dielektrikum

Mit dem Zusammenhang zwischen Ladung und Feldstärke im Plattenkondensator gilt dann:

$E_{vak} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$	Feldstärke im Vakuum
$E_{pol} = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$	Von den Oberflächenladungen des Dielektrikums erzeugte Feldstärke, zur äußeren entgegengerichtet
$\vec{E} = \vec{E}_{vak} + \vec{E}_{pol}$	Effektive Feldstärke im Dielektrikum, Superposition der Felder von den Ladungen auf den Platten und den induzierten Ladungen auf der Oberfläche des Dielektrikums
$E = \frac{E_{vak}}{\epsilon} = \frac{\sigma_0}{\epsilon \cdot \epsilon_0} = \frac{\sigma_0 - \sigma_p}{\epsilon_0}$	

Tabelle 4 Feldstärken und Ladungsdichten im Dielektrikum

### 6.1.8.1 Polarisierung und elektrische Dipole

Zur Berechnung der Kapazität im Kondensator mit Dielektrikum wurden sowohl für die Leiterplatten als auch für den Isolator Oberflächenladungen angesetzt. Zwischen beiden gibt es aber einen wichtigen Unterschied: Freie Ladungen, wie die an der Oberfläche der leitenden Kondensatorplatten, gibt es in Isolatoren nicht. Die Ladungstrennung in Isolatoren besteht in der Erzeugung oder Ausrichtung von *polaren* Bausteinen.

Polare Baugruppen sind elektrische *Dipole*, auf die in einem homogenen elektrischen Feld ein Drehmoment wirkt, das sie in Richtung der Feldstärke dreht. Beschleunigungen, die eine Translation bewirken, treten keine auf. In inhomogenen Feldern variiert dagegen die Dichte der Feldlinien: Auf den Dipol wirken dann beschleunigende Kräfte, weil seine unterschiedlich geladenen Enden in Gebieten unterschiedlicher Feldstärken liegen.

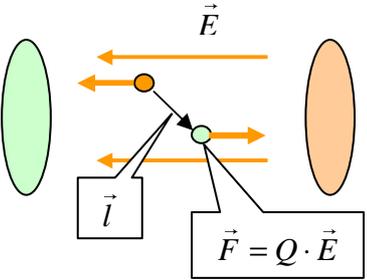
$\vec{p} = Q \cdot \vec{l}$	Elektrisches Dipolmoment, Ladung $\pm Q$ , Vektor zwischen den Ladungen $\vec{l}$
	Im homogenen elektrischen Feld wirkt auf einen elektrischen Dipol ein Drehmoment: $\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E} = Q \cdot \vec{l} \times \vec{E}$

Tabelle 5 Drehmoment auf einen elektrischen Dipol im homogenen Feld

Die Feldstärke  $\vec{E}_{pol}$  im Isolator wird von der Flächenladung  $\sigma_p$  auf dem Dielektrikum erzeugt. Die Flächenladung entsteht aus atomaren Dipolen. Zur Verbindung der makroskopischen Feldstärken mit den atomaren Dipolen wird die vektorielle Polarisierung eingeführt, ihr Betrag zeigt einerseits die Flächenladung  $\sigma_p$  auf dem Dielektrikum, andererseits ist er die Summe der atomaren Dipolmomente:

$P = \sigma_p$	Der Betrag der Polarisierung zeigt die Flächenladung auf dem Dielektrikum
$\vec{P} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}_{pol}$	Deshalb erzeugt die Polarisierung im Dielektrikum die Feldstärke $E_{pol}$
$P = \sigma_p = \frac{Q_p}{A} = \frac{Q_p \cdot d}{A \cdot d} = \frac{Q_p \cdot d}{V}$	Die Polarisierung ist -formal- ein auf die Volumeneinheit bezogenes elektrisches Dipolmoment
$Q_p$	Oberflächenladung auf dem Dielektrikum
$A, d, V$	Fläche, Abstand, Volumen im Plattenkondensator
$\vec{P} = n \cdot \vec{p}$	Die Polarisierung ist die Summe der atomaren Dipolmomente
$n$	Anzahl der Dipolmomente in einer Volumeneinheit

Tabelle 6 Definition der Polarisierung und ihre Verbindung zu Dipolen auf atomarer Skala

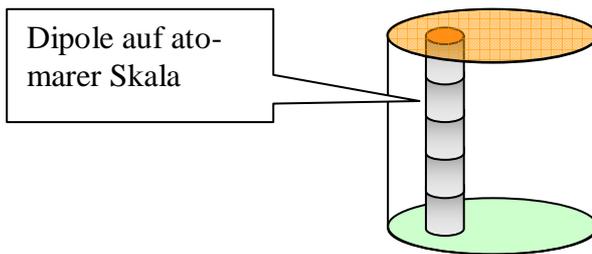


Abbildung 2 Die Oberflächenladungen auf Dielektrika entstehen aus atomaren Dipolen, deren Ladungen sich im Inneren des Materials aufheben. Der große Zylinder repräsentiert das Dielektrikum, die kleinen die Dipole auf atomarer Skala.

**Versuch 3** Kraft auf einen Wasserstrahl. Ein statisch geladener Stab induziert Dipole im Wasser, diese streben zum geladenen Stab.

**Versuch 4** Kraft auf Luftblasen in Öl. Eine in einem Ölbad befindliche Spitze wird aufgeladen. Im Öl entstehen Dipole, die zur Spitze streben. Die Luftblasen stören dabei, sie werden von der Spitze weg gedrängt.

### 6.1.8.2 Die dielektrische Suszeptibilität

Die Möglichkeit, durch ein äußeres Feld die atomaren Dipole auszurichten, hängt vom Material ab. Ein Maß für die „Empfindlichkeit“ des Materials gegenüber dem effektiven Feld  $\vec{E}$  ist die dielektrische Suszeptibilität  $\chi$ . Sie ist mit der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon$  verknüpft:

$\vec{P} = \epsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E}$	Definition der Suszeptibilität $\chi$
$\vec{E}_{pol} = \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = \chi \cdot \vec{E}$	Folgt aus Def. Polarisation
$\vec{E}_{pol} = \vec{E}_{vak} - \vec{E}$	Folgt aus Def. Effektive Feldstärke
$\vec{E}_{pol} = \epsilon \cdot \vec{E} - \vec{E} = (\epsilon - 1) \cdot \vec{E}$	
$\chi = \epsilon - 1$	Zusammenhang zwischen der Dielektrizitätskonstanten und der Suszeptibilität

Tabelle 7 Die dielektrische Suszeptibilität

**Versuch 5** Be- und Entladen eines Kondensators mit unterschiedlichen Materialien als Dielektrikum: Leer, Plastik,  $BaTiO_3$ .

### 6.1.8.3 Die dielektrische Verschiebung

Eine beim Übergang vom Vakuum in das Dielektrikum stetige Größe erhält man durch Definition der *dielektrischen Verschiebung* ([http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/V6\\_1A\\_Verschiebung.DOC](http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/V6_1A_Verschiebung.DOC))

$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot (\vec{E} - \vec{E}_{pol})$	Dielektrische Verschiebung, sie verläuft stetig beim Übergang vom Vakuum in das Dielektrikum
--	--

## 6.1.9 Stoffklassen mit unterschiedlichen elektrischen Eigenschaften

### 6.1.9.1 Dielektrische Stoffe, Verschiebungspolarisation

In dielektrischen Stoffen wird die Polarisation nur durch vom Feld induzierte Dipole erzeugt. In den neutralen Atome werden durch das elektrische Feld die Schwerpunkte von positiver und negativer Ladung verschoben. Dieser Mechanismus wird deshalb als „Verschiebungspolarisation“ bezeichnet. Die Größe des Effekts ist charakteristisch für das Material. Die Verschiebungspolarisation folgt dem Feld unmittelbar, sie folgt sogar den schnell wechselnden Feldern einer Lichtwelle und ist damit für den Brechungsindex verantwortlich.

Die molekularen Dipolmomente sind mit der molekularen Polarisierbarkeit  $\alpha$  zur Feldstärke proportional. Aus ihnen folgt die makroskopische Suszeptibilität  $\chi$  bzw. die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$ . In Materialien hoher Dichte wirkt auf die Teilchen im Innern des Dielektrikums die effektive Feldstärke  $E_{eff}$ . Das ist in der Clausius Mosotti Beziehung berücksichtigt.

$\vec{P} = \epsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E}$	Makroskopische Polarisation und Suszeptibilität
$\vec{P} = n \cdot \vec{p}$	Die makroskopische Polarisation ist die Summe aller mikroskopischer Polarisationen bei $n$ Dipolen in der Volumeneinheit
$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}$	Mikroskopische Polarisation und molekulare Polarisierbarkeit
$n \cdot \alpha \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E}$	Setzt man die auf unterschiedlichen Größenskalen formulierte Polarisationen gleich, dann folgt:
$\alpha = \frac{\epsilon_0 \cdot \chi}{n}$	Die makroskopische Suszeptibilität ist proportional zur molekularen Polarisierbarkeit
$n = \frac{N_A}{V_{mol}} = \frac{N_A \cdot \rho}{M_{mol}}$	Die Teilchenzahl wird durch die Avogadrokonstante $N_A$ , die Masse $M_{mol}$ eines mols und das Molvolumen $V_{mol}$ ausgedrückt. Es folgt die Beziehung für Dielektrika geringer Dichte in der folgenden Tabelle.

Tabelle 8 Makroskopische und molekulare Polarisierbarkeit bei Verschiebungspolarisation

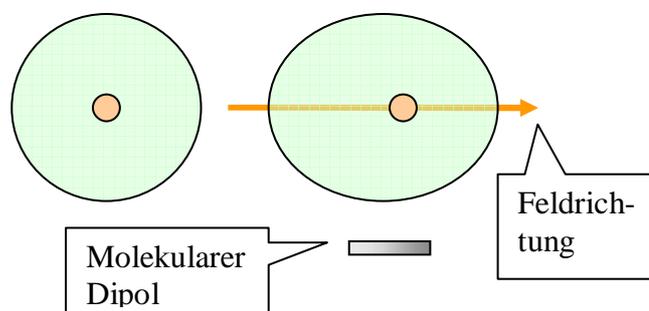


Abbildung 3 Schema der Entstehung der Dipole bei Verschiebungspolarisation. Man beachte, daß in Wirklichkeit der Durchmesser für den Kern ca.  $10^{-14} \text{ m}$ , für die Elektronenhülle ca.  $10^{-10} \text{ m}$  beträgt

Stoffklasse	Molekulare Polarisierbarkeit $\alpha$ und Feldstärke $E$	Molekulare Polarisierbarkeit $\alpha$ und makroskopische Dielektrizitätskonstante $\epsilon$ :
Dielektrika geringer Dichte Jedes Teilchen sieht die Vakuum Feldstärke, z.B. in Gasen	$\vec{p} = \alpha \vec{E}$	$(\epsilon - 1) \frac{M}{\rho} = \frac{1}{\epsilon_0} \alpha N_A$
Dielektrika hoher Dichte Die Teilchen sehen ein effektives Feld im Innern des Dielektrikums	$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}_{\text{eff}}$	Clausius Mosotti Beziehung $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{M}{\rho} = \frac{N_A}{3\epsilon_0} \alpha$
		$1 < \epsilon < 10$

Tabelle 9 Makroskopische Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  und molekulare Polarisierbarkeit  $\alpha$  in Dielektrika.

### 6.1.9.2 Parelektrische Stoffe, Orientierungspolarisation

In diesen Materialien sind polare Moleküle vorhanden, die durch das äußere Feld ausgerichtet werden, z. B. in Wasser, Alkoholen, Säuren. Der Ausrichtung wirkt die Wärmebewegung störend entgegen. Während die Verschiebungspolarisation dem Feld unmittelbar folgt, hinkt die Orientierungspolarisation dem Feld nach, um so mehr, je höher *viskos* das Medium ist. Bei allen Stoffen liefert aber die Verschiebung der Ladungsschwerpunkte, wie in den Dielektrika, einen zusätzlichen Anteil zur Polarisation.

In parelektrischen Stoffen wird bei genügend hohen Feldstärken die Sättigung erreicht, wenn nahezu alle Dipole ausgerichtet sind. Typisch für diese Stoffklasse ist die von der Temperatur abhängige Suszeptibilität, die durch das Curie Gesetz beschrieben wird.

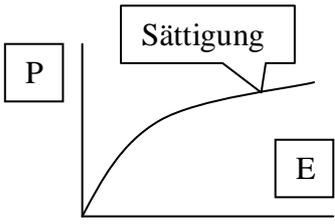
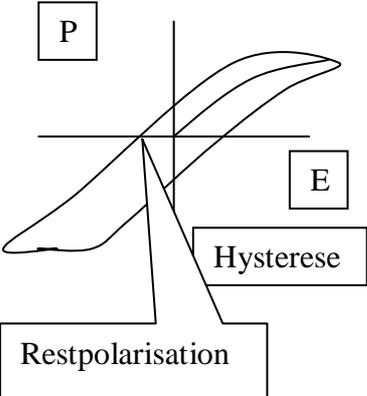
Stoffklasse	Polarisierbarkeit	Curie Gesetz für die Suszeptibilität
Parelektrisch	$p \sim \frac{1}{T} E$	$\chi = n \left( \alpha + \frac{p_p^2}{3kT} \right)$
		
		$10 < \epsilon < 100$

Tabelle 10 Polarisierbarkeit in Stoffen mit Orientierungspolarisation (parelektrische Stoffe).

### 6.1.9.3 Ferroelektrische Stoffe

Ferroelektrika sind kristalline Materialien, in denen es permanente Dipole gibt, die in einzelnen Bereichen schon ausgerichtet sind. In diesen „Domänen“ genannten Bereichen klappen die Dipole bei Wirkung eines äußeren Feldes um, allerdings verhaken sich immer einige Domänen. Die Polarisation hängt deshalb nicht nur von der Feldstärke ab sondern auch davon, ob die Feldstärke von höheren oder niederen Werten angefahren wird. Diese Eigenschaft bezeichnet man als Hysterese. Ferroelektrika sind Stoffe, in denen die Dielektrizitätskonstante die höchsten Werte erreicht.

Oberhalb der Curie Temperatur verschwindet die spontane Polarisation, die damit verbundene Änderung der kristallinen Struktur zeigt, daß es keine ausgerichteten polaren Bausteine mehr gibt.

Ferroelektrika	 <p>Das Diagramm zeigt die Polarisation <math>P</math> auf der vertikalen Achse und das elektrische Feld <math>E</math> auf der horizontalen Achse. Die Kurve bildet eine geschlossene Schleife, die als Hysterese bezeichnet wird. Ein Punkt auf der Kurve markiert die Restpolarisation, die bei <math>E = 0</math> verbleibt.</p>	Dielektrizitätskonstante
		$10^3 < \epsilon < 10^5$

Bei Materialien mit Hysterese gibt es, nach vorangegangener Polarisation im Feld, eine permanente Restpolarisation auch ohne Feld. In „Elektret“ genannten Materialien wird diese Eigenschaft genutzt, sie sind das elektrische Pendant zum Permanentmagneten.

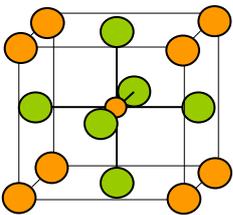
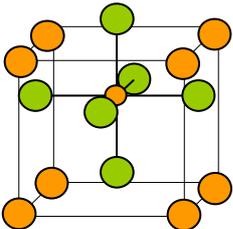
 <p>Ein kubisches Gittermodell mit orangefarbenen Kugeln an den Ecken und grünen Kugeln an den Flächenmitten. Die Schwerpunkte der positiven (orange) und negativen (grün) Ladungen fallen in einem zentralen Punkt zusammen.</p>	<p>Elementarzelle des BaTiO<sub>3</sub> Kristalls bei <math>T &gt; T_C</math>. Die Schwerpunkte der positiven und negativen Ladungen liegen in einem Punkt, makroskopisch erscheint die Struktur isotrop.</p> 
 <p>Ein kubisches Gittermodell mit orangefarbenen Kugeln an den Ecken und grünen Kugeln an den Flächenmitten. Die grünen Kugeln sind gegenüber den orangefarbenen Kugeln verschoben, was die Bildung eines elektrischen Dipols darstellt.</p>	<p>Bei <math>T &lt; T_C</math> verschiebt sich der Schwerpunkt der negativen gegenüber dem der positiven Ladung. Die Zelle wird zum elektrischen Dipol, der sich im Feld ausrichten kann.</p> 

Tabelle 11 Kristallbau im Bariumtitanat. Atome an den Ecken: Ba<sup>2+</sup>, auf den Flächenmitten O<sup>2-</sup>, in der Würfelmitte Ti<sup>4+</sup>.

**Versuch 6 Hysterese am BaTiO<sub>3</sub>**

**Versuch 7 Elektret:** Zunächst warm, dann kalt: In der Kälte bleiben die elektrischen Momente permanent.

**6.1.9.4 Piezoelektrischer und pyroelektrischer Effekt**

Bei einigen Kristallen, Turmalin, Quarz und Seignette Salz, bewirkt mechanischer Druck Ladungen an den Oberflächen. Es gibt polare Baugruppen, bei denen im Gleichgewicht die Coulombkräfte zwischen den Dipolen durch elastische Kräfte ausgeglichen werden, so daß der ganze Kristall makroskopisch feldfrei ist. Bei Druck wird die Länge des Bauteils geändert. Dadurch wird auch das Gleichgewicht der Ladungen gestört und es entsteht ein elektrisches Feld auf makroskopischer Skala. Bei Umkehrung dieses Effekts bewirkt ein elektrisches Feld eine Längenänderung. Darauf beruht die Wirkungsweise elektro-mechanischer Aktoren zur Längenverstellung.

Piezoeffekt:	
$\Delta Q \sim \Delta l$	Die Oberflächenladung ist zur Längenänderung proportional
Pyroelektrischer Effekt:	
$\Delta Q \sim \Delta T$	Die Oberflächenladung ist zur Temperaturänderung proportional

**Versuch 8 Das Gewicht bestimmt die Spannung am Piezokristall****Versuch 9 Anwendung: Gasanzünder**

Die bei diesen Effekten entstehenden Ladungen werden allerdings nach einiger Zeit durch die Anlagerung von Ionen aus der Umgebung ausgeglichen.

**Versuch 10 Hüpfender Gieß:** Die Längenänderung bei Betrieb eines Seignettesalz-Kristalls mit Wechselspannung wird sichtbar. Umkehrung des Effekts: Dieser Aufbau dient als Mikrofon.