Mittelwert und Standardabweichung bei wiederholter Beobachtung mit unterschiedlichen Genauigkeiten

Jörg Ihringer

Ein Messwert werde N mal erfasst, aber mit unterschiedlicher Genauigkeit. Jede Beobachtung Nr. j liefere einen Messwert x_j und eine Standardabweichung σ_j. Aus diesen Wertepaaren kann der Mittelwert $\bar{x}$ der Messgröße und die Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}}$ des Mittelwerts berechnet werden.

x_j	Messwert bei Beobachtung Nr. j
σ_j	Standardabweichung zur dieser Beobachtung
N	Anzahl der Beobachtungen
$\bar{x} = \dfrac{\sum_{j=1}^{N} \frac{x_j}{\sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_j^2}}$	Mittelwert für x
$\sigma_{\bar{x}}^2 = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_j^2}}$	Varianz, Quadrat der Standardabweichung, von $\bar{x}$

Tabelle 1 Mittelwert und Standardabweichung bei wiederholter Beobachtung mit unterschiedlichen Genauigkeiten

Den Mittelwert folgt entweder aus der Forderung nach der kleinsten Summe der gewichteten Fehlerquadrate oder aus der Forderung nach größter Wahrscheinlichkeit für den gesamten Satz der Messwerte. Diese Wahrscheinlichkeit wird mit der „Likelihood-Funktion" formuliert.

Kennt man den analytischen Ausdruck für den Mittelwert, dann kann die Standardabweichung des Mittelwerts aus den partiellen Ableitungen des Mittelwerts nach den die Messwerte repräsentierenden Variabeln und ihren Standardabweichungen bestimmt werden („Fehlerfortpflanzungs-Gesetz").

Berechnung des Mittelwerts mit Hilfe der Likelihood-Funktion

Die „Likelihood-Funktion" ist vor allem in der angelsächsischen Literatur gebräuchlich, auch sie führt auf die Summe der Fehlerquadrate. Das Ergebnis jeder einzelnen Messung, z. B. der Wert x_j der Messung Nr. j, wird als Stichprobe aus einer Gaußverteilung mit Mittelwert $\bar{x}$ und Standardabweichung σ_j aufgefasst. Nach jeder Messung überlegt man sich nun, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Messwert zwischen x_j und $x_j + dx$ zu erwarten war („aposteriori-Wahrscheinlichkeit"). Nach allen N Messungen formuliert man aus dem Produkt aller Einzel-Wahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeit für den gesamten Satz der Ergebnisse (unabhängige Beobachtungen vorausgesetzt). Die Variable in diesem Produkt, $\bar{x}$, wird aus der Forderung berechnet, dass das Produkt, d. h. die Wahrscheinlichkeit für den ganzen Satz der Beobachtungen, maximal wird.

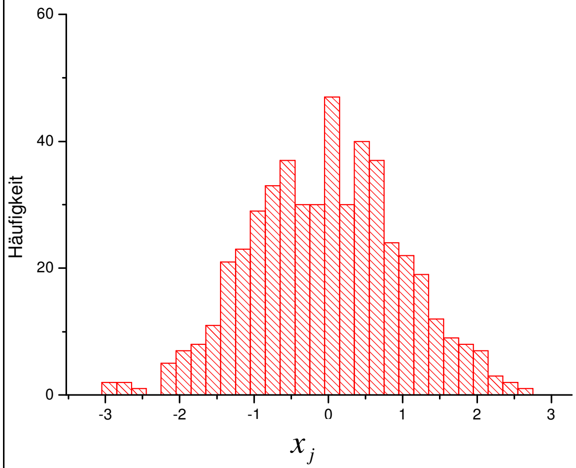	Beispiel: Histogramm von 500 Messungen des Werts Nr. j zum Mittelwert $\bar{x}=0$ und $\sigma_j=1$.
$dP_j = f(x_j,\bar{x})\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(x_j-\bar{x})^2}{2\sigma_j^2}}\,dx$	Wahrscheinlichkeit, einen Messwert zwischen x_j und x_j+dx aus einer Gaußverteilung mit Mittelwert $\bar{x}$ und Standardabweichung σ_j zu erhalten.
$dP = L\cdot dx = \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(x_j-\bar{x})^2}{2\sigma_j^2}}\,dx$	Wahrscheinlichkeit, den ganzen Satz mit N Messwerten zwischen x_j und x_j+dx ($j=(1,2,..N)$) bei Mittelwert $\bar{x}$ und den Standardabweichungen σ_j zu erhalten
$L = \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(x_j-\bar{x})^2}{2\sigma_j^2}}$	Definition der Likelihood Funktion. Zur Erleichterung der Rechnung bildet man den
$l = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j-\bar{x})^2}{\sigma_j^2} + \text{const.}$	Logarithmus der Likelihood Funktion, das ist – bis auf die Konstante- die Summe der gewichteten Fehlerquadrate.
$\frac{dl}{d\lambda} = \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j-\bar{x}}{\sigma_j^2} = \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j}{\sigma_j^2} - \bar{x}\cdot\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_j^2} = 0$	Bedingung für das Maximum, es folgt daraus der
$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{N} \frac{x_j}{\sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_j^2}}$	Mittelwert

Tabelle 2 Berechnung des Mittelwerts bei wiederholter Beobachtung mit unterschiedlichen Genauigkeiten mit Hilfe der Likelihood-Funktion

Berechnung der Standardabweichung des Mittelwerts

Die Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}}$ des Mittelwerts $\bar{x}$ folgt aus dem „Fehlerfortpflanzungs-Gesetz“ als Funktion der Standardabweichungen σ_j.

$\bar{x} = \dfrac{\sum_{j=1}^{N} \frac{x_j}{\sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_j^2}} = \dfrac{\mathrm{Z}(\mathbf{x})}{\mathrm{N}}$ $\mathrm{Z}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} \dfrac{x_j}{\sigma_j^2}$ $\dfrac{\partial \mathrm{Z}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \dfrac{1}{\sigma_j^2}$ $\mathrm{N} = \sum_{j=1}^{N} \dfrac{1}{\sigma_j^2}$	Mittelwert, aufgeteilt in Zähler Z und Nenner N. Nur Z hängt vom Vektor **x** der Messwerte ab.
$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum_{j=1}^{N} \left(\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}^2 \cdot \sigma_j^2$ $\sigma_{\bar{x}}^2 = \dfrac{1}{\mathrm{N}^2} \cdot \sum_{j=1}^{N} \left(\dfrac{\partial \mathrm{Z}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}^2 \cdot \sigma_j^2$ $\sigma_{\bar{x}}^2 = \dfrac{1}{\mathrm{N}^2} \cdot \sum_{j=1}^{N} \dfrac{1}{\sigma_j^4} \cdot \sigma_j^2 = \dfrac{1}{\mathrm{N}} = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_j^2}}$	Fehlerfortpflanzungsgesetz, Z und N eingesetzt

Tabelle 3 Berechnung der Standardabweichung des Mittelwerts aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz

Literatur: z.B. S. Brandt, Datenanalyse, (1992), BI Wissenschaftsverlag Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich

Zur Skripten Seite:
http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/skripten.html