Retour au menu

Dipôles en régime transitoire

1 – Relations courant tension

S'il existe une relation linéaire entre la tension u(t) et le courant i(t) dans un dipôle, celui-ci est « linéaire ». Rappelons les relations entre u(t) et i(t) pour les dipôles passifs usuels.

❒ – **Résistances**

La loi d'Ohm donne : $U(t) = R.I(t)$ R en *ohms* (Ω)

❒ – **Inductances**

De la loi de Lenz, on tire : $U(t) = L\dfrac{dI(t)}{dt}$ $I(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int U(t)dt$ L en *henrys* (H)

❒ – **Condensateurs**

De dQ(t) = C.dU(t), on tire : $I(t) = C\dfrac{dU(t)}{dt}$ $U(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int I(t)dt$ C en *farads* (F)

2 – Dipôles passifs linéaires en régime variable

Soit un circuit constitué de dipôles passifs linéaires soumis à une tension de commande V(t) et la variable y(t) dont la nature (intensité, charge…) est fonction du problème considéré. On peut écrire, pour ce circuit, une équation différentielle dont tous les coefficients a_i sont constants et dont la forme générale est :

$$\mathbf{a_0.y + a_1.y' + a_2.y'' + ... + a_n.y^{(n)} = k.V(t)}$$

On montre en analyse que la solution de cette équation est du type :

$$\mathbf{y(t) = y_1(t) + y_2(t)}$$

$y_1(t)$ est **la** solution générale de l'équation **sans** second membre.

$y_2(t)$ est **une** solution particulière de l'équation **avec** second membre.

☞ Physiquement, $y_1(t)$ correspond au **régime libre** c'est-à-dire au fonctionnement du circuit sans contraintes extérieures.

$y_2(t)$ correspond au **régime forcé** dont la nature est la même que celle de l'excitation V(t) qui est imposée au circuit.

Après un **régime transitoire** dont la durée est fonction des **constantes de temps** du circuit, on obtient le **régime permanent**.

Le système est dit du premier ordre si l'équation différentielle obtenue est du premier degré, du second ordre si elle est du second degré ...

3 – Systèmes du premier ordre

3.1 – Charge et décharge d'un condensateur

❒ Charge

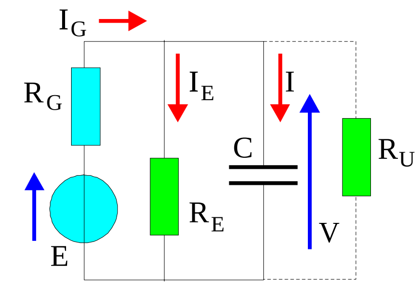


Fig 1

On se place dans le cas le plus général : R_E est une résistance qui tient compte de la résistance de fuite du condensateur R_F et de la résistance de charge éventuelle R_U . ($R_E = R_U$ // R_F).
Le générateur utilisé pour la charge est modélisé par un générateur idéal de f.e.m. E et de résistance interne R_G .

<u>Méthode des mailles</u>

$$I_G = I + I_E = I + V/R_E$$

$$I = dQ/dt = C.dV/dt$$

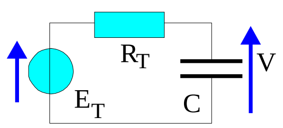
$$E = V + R_G.I_G = V + R_G.C.dV/dt + V.R_G/R_E$$

$$E = V.\left(\frac{R_E + R_G}{R_E}\right) + R_G.C.\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{E.R_E}{R_E + R_G} = V + \frac{R_G.R_E}{R_E + R_G}C\frac{dV}{dt}$$

Donc en posant : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_G} + \frac{1}{R_E}$, on tire : $E\frac{R}{R_G} = RC\frac{dV}{dt} + V$

<u>Méthode de Thévenin</u>



Le générateur équivalent qui est relié au condensateur est caractérisé par :

$E_T = E.R_E/(R_E + R_G)$ $R = R_T = R_E.R_G/(R_E + R_G)$

$E_T = V + R_T.I$

$$\boxed{E\frac{R}{R_G} = V + R.C\frac{dV}{dt}} \qquad (1)$$

❒ – La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$0 = V + R.C.dV/dt$$

$$dV/V = -1/R.C.\ dt$$

Si A désigne une constante arbitraire, la solution de cette équation (1er ordre) est :

$$V = A.\exp(-t / RC) \qquad (2)$$

Comme une quantité d'électricité est le produit d'une capacité par une tension, en utilisant les équations dites « aux dimensions » , on tire :

$[Q] = [C].[V] = [I].[T]$ $[C].[R].[I] = [I].[T]$ $[R].[C] = [T]$

RC qui a la dimension d'un temps est la « **constante de temps** » τ du circuit.

❒ – Solution particulière de l'équation avec second membre :

Si V est constant alors dV/dt = 0.

$V = E.R/R_G$ est donc une solution. Elle correspond au **régime permanent** : la charge du condensateur est alors terminée.

❒ – Solution complète de l'équation différentielle : $V(t) = A \exp(-t/RC) + E.R/R_G$ (3)

❒ – Solution physique de l'équation différentielle :

Pour obtenir la solution du problème physique, il faut préciser les **conditions initiales** de celui-ci. Si l'on suppose le condensateur totalement déchargé lors de la mise sous tension du montage : en $t = 0$, on a alors $V = 0$.

La valeur de la constante A est donc : $A = -E.R/R_G$. On en déduit :

$$V = \frac{E.R}{R_G}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad (4)$$

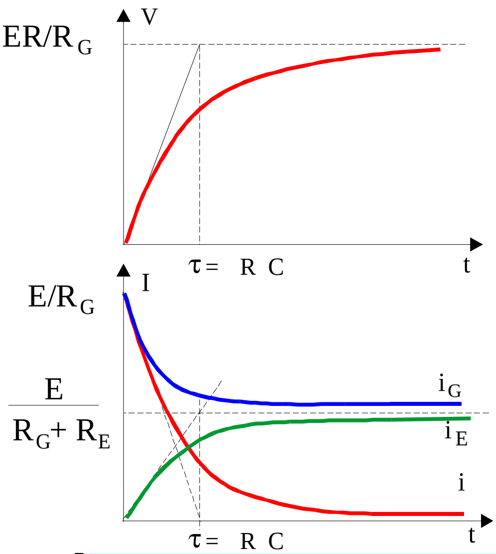
La durée nécessaire à la charge totale est donc infinie. En pratique, cherchons au bout de combien de temps la charge atteint sa valeur finale à un millième près :
si $(V\infty - V)/V\infty = 10^{-3}$ alors : $\exp(-t/RC) = 1/1000$.

$$t/RC = \text{Ln } 1000 \qquad t \approx 6{,}9.RC$$

Au bout de $t \approx 7.\tau$, la charge ne diffère de la charge finale que de 0,001. On peut considérer la charge du condensateur terminée.

Cliquez ici pour visualiser le fonctionnement du circuit.

Graphes de la tension V et des divers courants :



$I_E = V/R_E$

$$I_E = \frac{E.R}{R_E.R_G}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{E}{R_E + R_G}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$I = C\frac{dV}{dt} = \frac{E.}{R_G}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E.R}{R_E.R_G}\left(\frac{R_E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$I_G = I + I_E = \frac{E.R}{R_E.R_G}\left(1 + \frac{R_E}{R_G}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Bien noter sur ces graphiques les valeurs limites des tensions et courants et les valeurs des pentes des tangentes à l'origine.

Un condensateur déchargé se comporte au début de la charge comme un court-circuit pour l'alimentation. Seule la résistance R_G limite alors la valeur du courant..

❒ **Décharge**

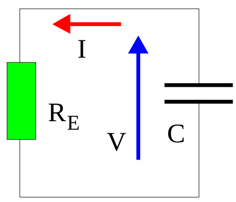


Fig. 3

Le condensateur est isolé du générateur et se décharge dans sa résistance de fuite R_F et dans la résistance de charge R_U. On pose $R_E = R_U // R_F$

$R_E.I - V = 0$

$I = - dQ/dt$ (Le condensateur se décharge : dQ est négatif !)

$V = - R_E C.dV/dt \quad \Rightarrow \quad V = A.\exp(-t/R_E C)$

En $t = 0$, on a : $V = V_0$

La solution de l'équation est donc :

$$\boxed{V = V_0.\exp(-t/R_E C)}$$

3.2 – Établissement du courant dans une inductance

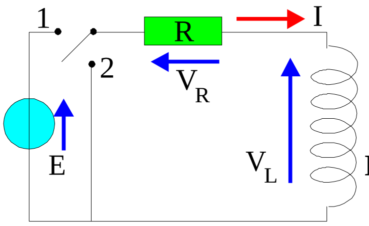


Fig 4

Selon la position de l'inverseur, on aura soit le régime libre (position 2) soit le régime forcé (position 1). Avec les notations de la figure 4, on a : $E = V_R + V_L$

Soit : $E = R.I + L\dfrac{dI}{dt}$

Regime libre (E = 0)

On obtient dans ce cas : $\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{R}{L}I = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dI}{I} = -\dfrac{dt}{\tau} \quad \text{avec} : \tau = \dfrac{L}{R}$

Exercice : Montrer que la constante τ a la dimension d'un temps.

La solution du régime libre est : $I(t) = A.\exp(-t/\tau)$

La condition initiale est : $I_{(t=0)} = I(0) = U_0/R$. Donc :

$$I(t) = I_0.e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{et} \quad V_L(t) = L\frac{dI}{dt} = -\frac{L.I_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = -RI_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

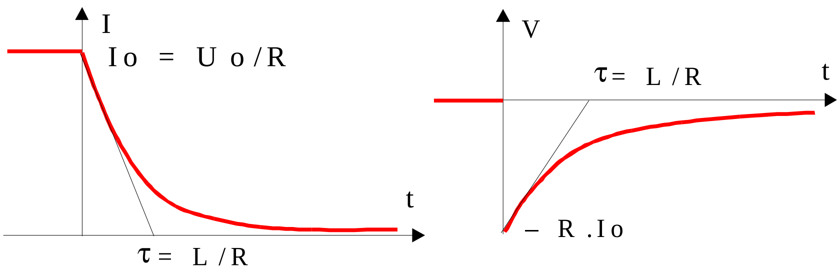


Fig. 5

Bien noter que si la fonction I(t) est continue, la fonction $V_L(t)$ est discontinue.

Regime force ($E \neq 0$)
Si $I_{(t=0)} = 0$, on obtient (inverseur en position 1) :

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{et} \quad V_L = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Le courant dans le circuit tend vers E/R ; la tension aux bornes de l'inductance tend vers zéro.

3.3 – Particularités des systèmes du premier ordre

Ces systèmes satisfont à une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants de la forme :

$$\frac{dG(t)}{dt} + \frac{G(t)}{\tau} = H$$

Pour le régime libre, H est nul et en régime forcé continu H est constant.
La solution est de la forme :

$$G(t) = G(0).e^{-\frac{t}{\tau}} + H.\tau$$

Cette solution dépend d'**une** constante **G(0)** fonction des *conditions initiales* et d'**un** paramètre $\boldsymbol{\tau}$ (*la constante de temps*), caractéristique du circuit.

4 – Systèmes du second ordre

4.1 – Le circuit R, L, C série

Le condensateur C du circuit R, L, C suivant est chargé par un générateur auxiliaire qui est ensuite déconnecté par K1.

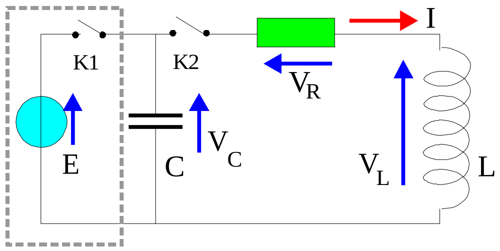


Fig. 6

La charge initiale du condensateur est :

$$q_0 = C.E$$

Si K2 est fermé et K1 ouvert, on a :

$$-V_C + V_L + V_R = 0$$

On obtient l'équation :

$$-\frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} + R.I = 0 \Leftrightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + R.\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

On pose :

$$LC\omega_0^2 = 1; \quad \lambda = \frac{R}{2L}; \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda$$

Q est le facteur de qualité et λ le facteur d'amortissement.
L'équation devient :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}.\frac{dq}{dt} + \omega_0^2.q = 0$$

En cherchant des solutions de la forme $q(t) = A.e^{rt}$, on obtient l'équation dite « *équation caractéristique* » suivante :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}.r + \omega_0^2 = 0$$

Ses racines sont :

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\alpha} = -\lambda \pm \sqrt{\alpha}$$

La solution générale de l'équation est de la forme :

$$q(t) = A_1.e^{r_1 t} + A_2.e^{r_2 t} = e^{-\lambda t}.(A_1.e^{\sqrt{\alpha}.t} + A_2.e^{-\sqrt{\alpha}.t})$$

La *constante de temps* est ici : $\tau = 1/\lambda = 2L/R$. Il faut connaître **deux** conditions initiales.

Selon le signe de α, la nature des solutions diffère.

❒ **α > 0** ($Q < ½$ ou $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$) (*amortissement fort*)

Les deux racines sont réelles. On pose :

$$\Omega = \sqrt{\alpha} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Les conditions initiales sont $q(t = 0) = q_0$ et $I(t = 0) = 0$

$$q_0 = A_1 + A_2 \quad 0 = r_1.A_1 + r_2.A_2 \quad \Leftrightarrow \quad (-\lambda + \Omega).A_1 = (\lambda + \Omega).A_2$$

On tire :

$$q(t) = \frac{q_0}{2\Omega}e^{-\lambda t}\left[(\lambda + \Omega).e^{\Omega t} + (-\lambda + \Omega).e^{-\Omega t}\right]$$

Comme $\Omega^2 - \lambda^2 = \alpha - \lambda^2 = -\omega_0^2$, on obtient :

$$I(t) = -q_0 \frac{\omega_0^2}{2\Omega} e^{-\lambda t} \left[e^{\Omega t} - e^{-\Omega t} \right]$$

Ce régime de fonctionnement est le régime **apériodique**. Le système revient à son état d'équilibre (q = 0, i = 0) sans oscillations.

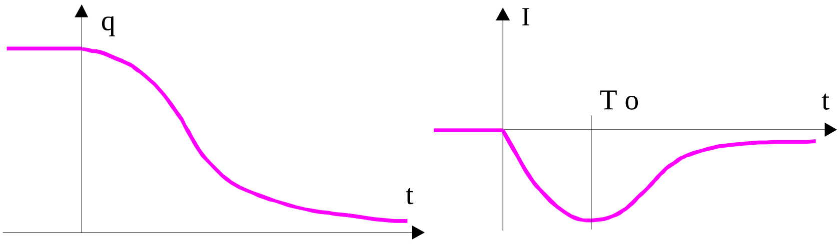


Fig. 7

EXERCICE : Montrer que $T_0 = \frac{1}{2\Omega} \ln\left(\frac{\lambda + \Omega}{\lambda - \Omega} \right)$

❐ **α = 0** (Q = ½) (*amortissement critique*)

Il y a une racine double $r = -\lambda$

La solution générale est de la forme :

$$q(t) = (A_1 . + t . A_2) . e^{r\,t}$$

Avec les conditions initiales précédentes, on obtient :

$$q(t) = q_0 (1 + \lambda t) . e^{-\lambda t} \qquad I(t) = -q_0 . \lambda^2 t . e^{-\lambda t}$$

Le régime de fonctionnement est **apériodique** et **critique**. C'est un régime limite qui est obtenu en diminuant la valeur de R jusqu'à la valeur $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

❐ **α < 0** (Q > ½ ou $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$) (*amortissement faible*)

On pose $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$. Les deux racines sont imaginaires conjuguées et valent :

$$r_{1,2} = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm j\omega$$

Toujours avec les mêmes conditions initiales ($q_{(t=0)} = q_0$, $i_{(t=0)} = 0$), on obtient :

$$q(t) = q_0 \frac{e^{-\lambda t}}{2j\omega} [(\lambda + j\omega) . e^{j\omega t} + (-\lambda + j\omega) . e^{-j\omega t}]$$

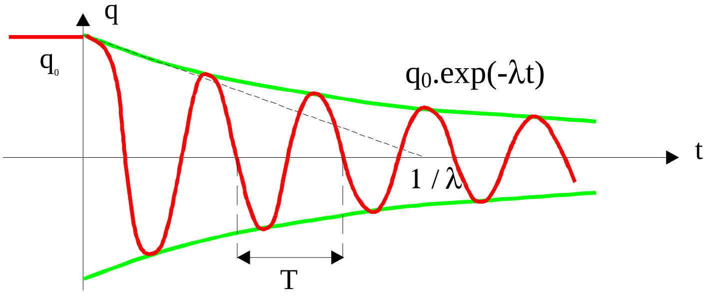


Fig. 8

Et en posant tg φ = λ/ω et donc cos φ = ω/ω_0 (car 1 + tg²φ = 1/cos²φ), on a :

$$q(t) = q_0 \frac{e^{-\lambda t}}{2j\omega}\cos(\omega t - \varphi) = q_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\lambda t}.\cos(\omega t - \varphi)$$

On obtient un régime oscillant amorti « pseudopériodique » (à cause de l'amortissement le phénomène n'est pas exactement répètitif) caractérisé par une pseudopériode $T = 2\pi/\omega$ et par le terme d'amortissement λ.

❒ **R = 0** (*amortissement nul*)

L'équation se résume à :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2.q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q(t) = q_0 \cos\omega_0 t$$

Le régime est sinusoïdal (périodique, non amorti). La période est : $T = 2\pi/\omega_0$.

Cliquez ici pour tester le fonctionnement du circuit RLC série en régime libre.

4.2 – Régime forcé du système

La solution est la somme du régime propre et d'une solution particulière du régime forcé. En régime forcé, la puissance fournie par le générateur est répartie dans les trois dipôles :

$$P = E.I(t) = R.I(t)^2 + I(t).\left(V_L + V_C\right) = R.I^2 + \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}L.I^2 + \tfrac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)$$

En régime propre, E = 0 ; l'énergie est emmagasinée de façon successive dans l'inductance et dans le condensateur.

4.3 – Particularités des systèmes du second ordre

Ces systèmes satisfont à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants de la forme :

$$\frac{d^2G(t)}{dt^2} + 2\lambda\frac{dG(t)}{dt} + \omega_0^2.G(t) = H$$

Pour le régime libre H est nul et en régime forcé continu, H est constant.

Cette solution dépend de **deux** *conditions initiales* et de **deux** paramètres λ et ω_0 caractéristiques du circuit.

Selon les valeurs relatives de ω_0 et de λ, on obtient différents régimes de fonctionnement :

– Régime apériodique si l'amortissement est fort.

– Régime critique pour une valeur limite de l'amortissement.

– Régime pseudopériodique si l'amortissement est faible.

– Régime périodique si l'amortissement est nul.

Retour au menu